



Lưu ý: - Thí sinh làm **MỖI** câu trên **MỘT** tờ giấy làm bài riêng biệt và ghi rõ **SỐ CÂU** ở dòng đầu tiên của trang thứ nhất (kể cả câu không làm được, nếu có);
- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu, Giám thị **không** giải thích gì thêm.

Câu 1. (4 điểm)

Tìm tất cả các số thực $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ thoả mãn:

$$\begin{cases} x(x-3) + 2y(y-3) - 9z = 0, \\ x(2x-9) - 12y + z(z-15) = 0, \\ -6x + y(y-9) + 2z(z-6) = 0. \end{cases}$$

Câu 2. (3 điểm)

Tìm tất cả các số thực a , b , c sao cho mỗi đa thức $x^2 - 3x + a$, $x^2 + x + b$ có 2 nghiệm thực phân biệt và là nghiệm của đa thức $x^3 - x^2 + cx + 4$.

Câu 3. (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho mỗi số $2^2 \cdot n - 1$, $2^3 \cdot n - 1$, ..., $2^n \cdot n - 1$ là số nguyên tố.

Câu 4. (5 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , có tia DA cắt tia CB tại điểm P . Lấy điểm X bất kỳ trên cạnh CD . Gọi J , K , L tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADX , BCX , PAB .

a) Chứng minh rằng O , J , K , L cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác JOK . Chứng minh rằng khoảng cách từ H đến CD bằng LP .

Câu 5. (4 điểm)

Một quân xe di chuyển 63 nước đi trên bàn cờ vua 8×8 , đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần và mỗi nước đi nó chỉ di chuyển từ một ô sang một ô có chung cạnh. Đánh số các ô của bàn cờ từ 1 đến 64 theo thứ tự mà quân xe đi qua (vị trí ban đầu của quân xe được đánh số 1). Gọi n là hiệu số lớn nhất giữa các số của hai ô có chung cạnh. Hỏi giá trị nhỏ nhất có thể có của n là bao nhiêu?

----- HẾT -----

Họ tên thí sinh: SBD:

Tên trường: Tên tỉnh/TP:



ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN** - Khối: **10**
Đáp án gồm 07 trang, 05 câu

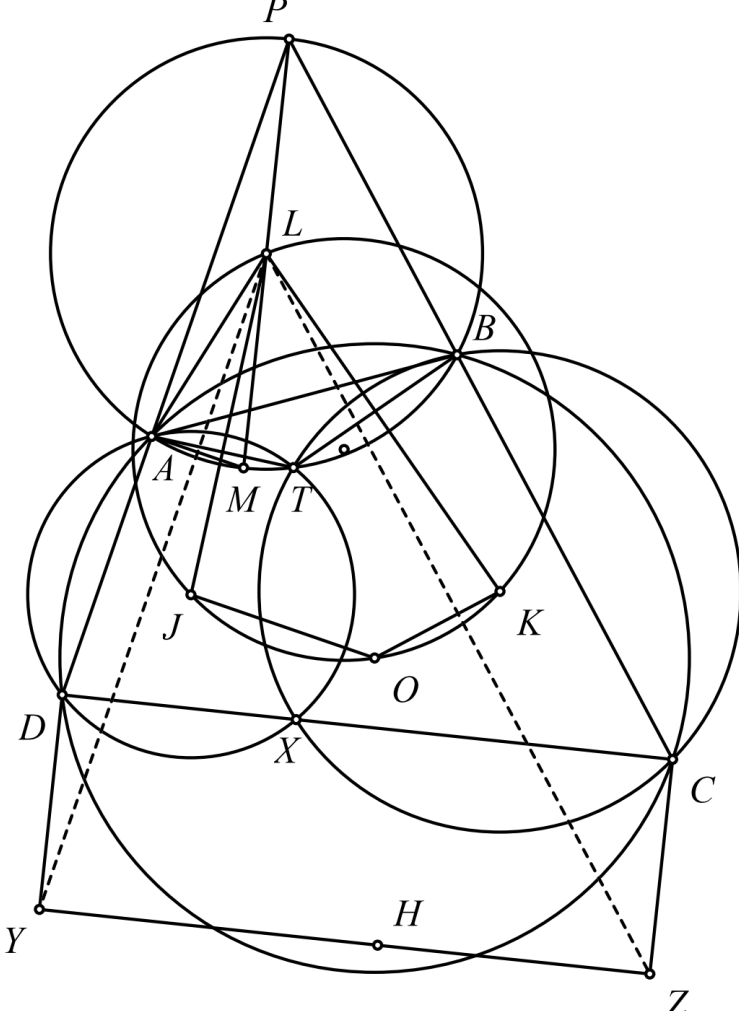
Câu 1	Nội dung	Điểm
Đề bài	<p>Tìm tất cả các số thực $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn:</p> $\begin{cases} x(x-3) + 2y(y-3) - 9z = 0, \\ x(2x-9) - 12y + z(z-15) = 0, \\ -6x + y(y-9) + 2z(z-6) = 0. \end{cases}$	4
Cách 1		
	<p>Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ hai rồi trừ đi 2 lần phương trình thứ ba, ta thu được</p> $3x^2 - 3z^2 = 0,$ <p>dẫn đến $z = x$ (do $x > 0, z > 0$).</p>	2
	<p>Thế $z = x$ thì phương trình đầu tiên trở thành $x^2 - 12x + 2y^2 - 6y = 0$, còn phương trình thứ hai trở thành $3x^2 - 24x - 12y = 0$.</p> <p>Do đó $y = \frac{x^2 - 8x}{4}$. Thế ngược lại vào phương trình đầu tiên, ta có</p> $x^2 - 12x + 2 \cdot \frac{(x^2 - 8x)^2}{16} - 6 \cdot \frac{x^2 - 8x}{4} = 0$ $\Leftrightarrow 8x^2 - 96x + x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 12x^2 + 96x = 0$ $\Leftrightarrow x^4 - 16x^3 + 60x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2(x^2 - 16x + 60) = 0$ $\Leftrightarrow x^2(x-6)(x-10) = 0.$	1
	<p>Vậy $x = 6$ hoặc $x = 10$. Với $x = 6$ ta có $y = -3$, mâu thuẫn. Với $x = 10$ ta thu được $y = 5$.</p>	0.5
	<p>Thử lại, ta dễ dàng kiểm tra được rằng bộ $(x; y; z) = (10; 5; 10)$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.</p>	0.5
Cách 2		
	<p>Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ hai rồi trừ đi 2 lần phương trình thứ ba, ta thu được</p> $3x^2 - 3z^2 = 0,$ <p>dẫn đến $z = x$ (do $x > 0, z > 0$).</p>	2

Câu 1	Nội dung	Điểm
	<p>Thế $z = x$ thì phương trình đầu tiên trở thành $x^2 - 12x + 2y^2 - 6y = 0$, còn phương trình thứ hai trở thành $3x^2 - 24x - 12y = 0$. Do đó</p> $2(x^2 - 12x + 2y^2 - 6y) - (3x^2 - 24x - 12y) = 0,$ <p>Suy ra $x^2 = 4y^2$, dẫn đến $x = 2y$ (do $x > 0, y > 0$). Do đó $x = z = 2y$.</p>	1
	<p>Thay $z = 2y$ và $x = 2y$ vào phương trình đầu tiên, ta được</p> $6y^2 - 30y = 0,$ <p>Suy ra $y = 5$ do $y > 0$.</p>	0.5
	<p>Thử lại, ta dễ dàng kiểm tra được rằng bộ $(x; y; z) = (10; 5; 10)$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.</p>	0.5

Câu 2	Nội dung	Điểm
Đề bài	Tìm tất cả các số thực a, b, c sao cho mỗi đa thức $x^2 - 3x + a, x^2 + x + b$ có 2 nghiệm thực phân biệt và là nghiệm của đa thức $x^3 - x^2 + cx + 4$.	3
Cách 1		
	Do $x^2 - 3x + a, x^2 + x + b$ có tổng cộng 4 nghiệm, còn $x^3 - x^2 + cx + 4$ có tối đa 3 nghiệm thực nên $x^2 - 3x + a$ và $x^2 + x + b$ phải có nghiệm chung. Gọi t là nghiệm chung, như vậy: $t^2 - 3t + a = 0; t^2 + t + b = 0$. Suy ra $4t + b - a = 0$, do đó $t = \frac{a-b}{4}$.	1
	Ngoài ra, rõ ràng ta phải có $(x^3 - x^2 + cx + 4)(x - t) = (x^2 - 3x + a)(x^2 + x + b)$ So sánh hệ số x^3 ở hai vế, ta được $t = 1$, do đó $a = b + 4$.	0,5
	Khi đó: $(x^3 - x^2 + cx + 4)(x - 1) = (x^2 - 3x + a)(x^2 + x + b)$. So sánh hệ số x^2, x và hệ số hằng ở hai vế, ta được: $\begin{cases} c + 1 = 2b + 1 \\ -c + 4 = -2b + 4 \\ -4 = b(b + 4). \end{cases}$ Từ đây, dễ dàng suy ra được $c = -4; b = -2$ và do đó $a = 2$.	1
	Thử lại, ta dễ dàng kiểm tra được với $a = 2, b = -2$ và $c = -4$ thì các đa thức $x^2 - 3x + 2, x^2 - x + 2, x^3 - x^2 - 4x + 4$ có các nghiệm 1, 2 và 1, -2 và -2, 1, 2.	0.5
Cách 2		
	Do $x^2 - 3x + a, x^2 + x + b$ có tổng cộng 4 nghiệm, còn $x^3 - x^2 + cx + 4$ có tối đa 3 nghiệm thực nên $x^2 - 3x + a$ và $x^2 + x + b$ phải có nghiệm chung. Gọi t là nghiệm chung.	0.5
	Theo định lý Viète, tổng hai nghiệm của $x^2 - 3x + a$ bằng 3 và tổng hai nghiệm của $x^2 + x + b$ bằng -1. Khi đó $x^2 - 3x + a$ có hai nghiệm là t và $3 - t$, $x^2 + x + b$ có hai nghiệm là t và $-1 - t$.	0.5
	Do đó $x^3 - x^2 + cx + 4$ có ba nghiệm là $t, -3 - t$ và $-1 - t$. Theo định lý Viète, $t + 3 - t - 1 - t = 1$, suy ra $t = 1$.	0.5
	Thay nghiệm $x = 1$ vào 3 đa thức ban đầu, ta được $1^2 - 3 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow a = 2;$ $1^2 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = -2;$ $1^3 - 1^2 + c \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow c = -4.$	1

Câu 2	Nội dung	Điểm
	Thử lại, ta dễ dàng kiểm tra được với $a = 2$, $b = -2$ và $c = -4$ thì các đa thức $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - x + 2$, $x^3 - x^2 - 4x + 4$ có các nghiệm 1, 2 và 1, -2 và -2, 1, 2.	0.5

Câu 3	Nội dung	Điểm
Đề bài	Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho mỗi số $2^2 \cdot n - 1$, $2^3 \cdot n - 1$, ..., $2^n \cdot n - 1$ là số nguyên tố.	4
	Chú ý rằng $n = 2$ và $n = 3$ thoả mãn điều kiện của bài toán, bởi vì $2^2 \cdot 2 - 1 = 7$ $2^2 \cdot 3 - 1 = 11, 2^3 \cdot 3 - 1 = 23$ là các số nguyên tố.	1
	Với $n = 4$, ta có $2^2 \cdot 4 - 1 = 15$ không là số nguyên tố. Với $n = 5$, ta có $2^3 \cdot 5 - 1 = 39$ không là số nguyên tố.	0.5
	Xét $n \geq 6$, khi đó $n - 1 \geq 5$. Nếu $n - 1$ có một ước nguyên tố lẻ p thì theo định lý Fermat nhỏ, ta có $2^{p-1} \cdot n - 1 \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$ Hiển nhiên $2^{p-1} \cdot n - 1 > p$ nên không thể là số nguyên tố.	1.5
	Giả sử $n - 1$ chỉ có ước nguyên tố là 2, hay n có dạng $n = 2^k + 1$. Rõ ràng $3 \leq k \leq n$. Mặt khác $2^{k-1} \cdot n - 1 = 2^{2k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^{2k-1} + 2^k - 2^{k-1} - 1 = (2^k - 1)(2^{k-1} + 1)$ không là số nguyên tố. Vậy chỉ có 2 số nguyên n thoả mãn bài toán là $n = 2$ và $n = 3$.	1

Câu 4	Nội dung	Điểm
Đề bài	<p>Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), có tia DA cắt tia CB tại điểm P. Lấy điểm X bất kỳ trên cạnh CD. Gọi J, K, L tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADX, BCX, PAB.</p> <p>a) Chứng minh rằng O, J, K, L cùng thuộc một đường tròn.</p> <p>b) Gọi H là trực tâm của tam giác JOK. Chứng minh rằng khoảng cách từ H đến CD bằng LP.</p>	5
4a	 <p>Rõ ràng các đường tròn (J), (K), (L) đồng quy tại điểm Miquel T của tam giác PCD ứng với bộ điểm X, A, B.</p>	1
	<p>Do đó $JL \perp AT, KL \perp BT$, suy ra</p> $\angle JLK = 180^\circ - \angle ATB = \angle DPC = 180^\circ - \angle JOK,$ <p>suy ra $LJOK$ là tứ giác nội tiếp.</p>	1
4b	<p>Gọi Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của L qua OJ, OK; M là điểm đối xứng với P qua L. Khi đó</p> $\angle LAM = \angle LMA = \angle PBA = \angle ADC.$ <p>Ta có YZ là đường thẳng Steiner của L ứng với tam giác OJK nên YZ đi qua trực tâm H của tam giác OJK.</p> <p>Mặt khác AD và YL có chung đường trung trực OJ nên $ADYL$ là hình thang cân, suy ra $DY = AL$.</p>	1

Câu 4	Nội dung	Điểm
	Ngoài ra $\angle YDC = \angle ADY - \angle ADC = \angle DAL - \angle LAM = 90^\circ$.	1
	Tương tự $CZ = AL$ và $\angle DCZ = 90^\circ$. Từ đó suy ra $DCYZ$ là hình chữ nhật. Vậy $d(H; CD) = d(Y; CD) = YD = LA = LP$.	1

Câu 5	Nội dung	Điểm
Đề bài	<p>Một quân xe di chuyển 63 nước đi trên bàn cờ vua 8×8, đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần và mỗi nước đi nó chỉ di chuyển từ một ô sang một ô có chung cạnh. Đánh số các ô của bàn cờ từ 1 đến 64 theo thứ tự mà quân xe đi qua (vị trí ban đầu của quân xe được đánh số 1). Gọi n là hiệu số lớn nhất giữa các số của hai ô có chung cạnh. Hỏi giá trị nhỏ nhất có thể có của n là bao nhiêu?</p>	4
	<p>Trước hết, xét cách đi hình con rắn như sau của quân xe: bắt đầu từ góc dưới bên trái, đi sang phải, mỗi nước sang ô bên cạnh cho đến hết hàng, sau đó đi lên ô ở hàng ngay trên, rồi đi sang trái, mỗi nước sang ô bên cạnh cho đến hết hàng, rồi đi lên ô ở hàng phía trên, v.v. Với cách đi này, ta dễ thấy rằng hiệu số lớn nhất của 2 ô chung cạnh bằng 15.</p>	1
	<p>Ta chứng minh đây là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Giả sử ngược lại rằng $n < 15$. Xét các số ở hàng trên cùng. Vì hiệu giữa hai số kề nhau trong hàng này không vượt quá 14, nên quân xe đi từ một số nhỏ hơn đến một số lớn hơn ở trên hàng này mà không đi qua một ô ở hàng dưới cùng (vì để xuống đó cần ít nhất 7 nước, và để quay lại cũng cần ít nhất 7 nước, cộng thêm một nước trong chính hàng dưới).</p>	1
	<p>Do đó quân xe đã đi qua tất cả các ô của hàng trên cùng mà không đi xuống hàng dưới cùng. Tương tự, quân xe di chuyển qua các ô của hàng dưới cùng mà không đi lên hàng trên cùng. Điều này có nghĩa là tất cả các số ở hàng trên cùng đều lớn hơn (hoặc đều nhỏ hơn) các số ở hàng dưới cùng.</p>	1
	<p>Tương tự, tất cả các số ở cột ngoài cùng bên trái đều lớn hơn (hoặc đều nhỏ hơn) các số ở cột ngoài cùng bên phải. Không mất tính tổng quát, giả sử các số ở cột ngoài cùng bên trái lớn hơn các số ở cột ngoài cùng bên phải, còn các số ở hàng dưới cùng lớn hơn các số ở hàng trên cùng. Bây giờ, gọi A là số của ô góc trên cùng bên trái và B là số của ô góc dưới cùng bên phải. Theo giả thiết, nếu xét theo cột thì $A > B$, còn nếu xét theo hàng thì $A < B$, mâu thuẫn.</p>	1