TRƯỜNG THPT PHÚ XUYÊN B

TỔ TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi này có 1 trang, 5 câu)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

Năm học 2024 - 2025

Môn: Toán - Lớp 10 – Kết nối tri thức với cuộc sống

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I: (*5 điểm*)

1. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m],\ B = [3 - m; 10)$

a) Với m = 4, tìm A $\cap$B

b) Tìm m để B \ A có ít nhất 5 số nguyên.

2. Mỗi học sinh của lớp $10A_1$ đều biết chơi đá cầu hoặc cầu lông, biết rằng có 25 em biết chơi đá cầu, 30 em biết chơi cầu lông, 15 em biết chơi cả hai. Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu em chỉ biết đá cầu? bao nhiêu em chỉ biết đánh cầu lông? Sĩ số lớp là bao nhiêu?

Câu II: (*4 điểm*)

1. Trên đoạn [– 9; 10] có bao nhiêu giá trị nguyên của m để x – y + 2m – 1 $\leq$ 0 với mọi x và y thoả mãn

hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$

2. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và $0,6$ tấn hàng. Xe B chở tối đa 10 người và $1,5$ tấn hàng.

Câu III: (*5 điểm*)

1. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì, ta có: sinC = sinA.cosB + sinB.cosA

2. Cho tam giác ABC có a = 2b.cosC và $\dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều

3. Cho tam giác ABC có 2a + 2b + 2c = 3(2 + $\sqrt{6} + \sqrt{2}$) , A = 60^0, C = 45^0 . Tìm a, b, c

Câu IV: (4 *điểm*)

1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và G là trọng tâm. Gọi E là trung điểm của AG. Tìm hai số m và n sao cho $\overrightarrow{CE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{MG}$

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có A(2; 1), B(0; – 2) và trực tâm H(– 16; 10). Tìm toạ độ điểm C

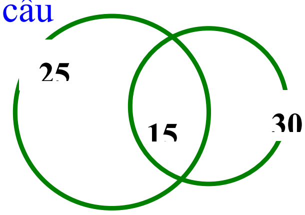
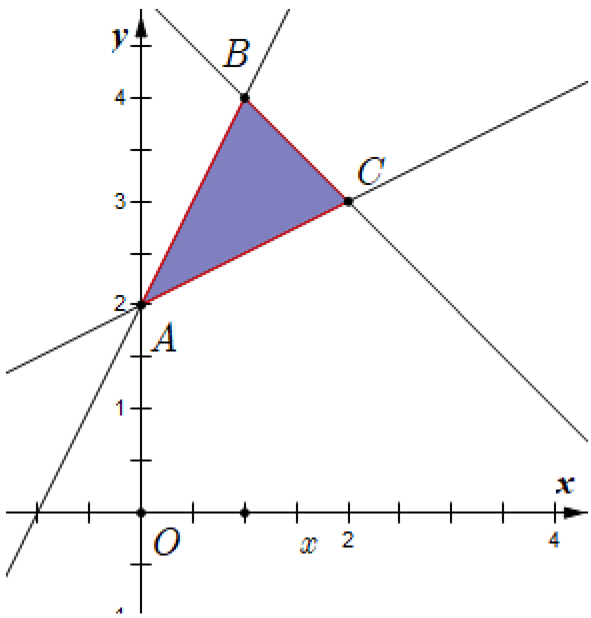
Câu V: (2 *điểm*)

1. Cho tam giác ABC đều tâm O. Lấy M tùy ý nằm trong tam giác ABC. Gọi F, D, E lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

2. Cho đường tròn tâm O, bán kính R = 5, M là điểm cố định cách O một đoạn bằng 7. Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn đi qua M và cắt (O) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

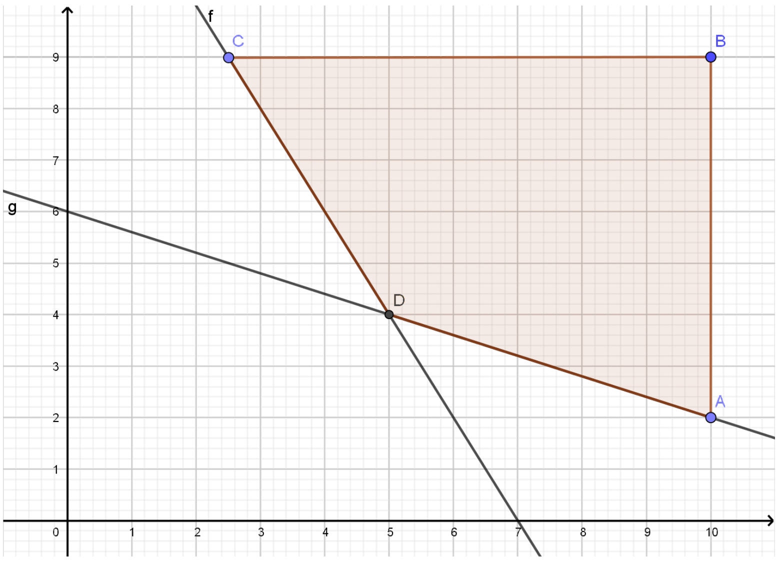
--------------------*Hết*--------------------

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI HSG 10 năm học 2024 – 2025

Câu	Đáp án	Điểm
I.1a **2 đ**	Với m = 4 suy ra A = $(-\infty\ ; 4]$, B = [– 1; 10). Vậy $A \cap B$ = [– 1; 4]	*2*
I.1b **2 đ**	+ Nếu $m < 3-m \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$ thì $B \setminus A = [3-m;10)$. Tập này chứa ít nhất 5 số nguyên khi $3-m \le 5 \Leftrightarrow m \ge -2$. Kết hợp điều kiện đang xét ta được $-2 \le m < \frac{3}{2}$.	*1*
	+ Nếu $m \ge 3-m \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{2}$ thì $B \setminus A = (m;10)$. Tập này chứa ít nhất 5 số nguyên khi $m < 5$. Kết hợp điều kiện đang xét ta được $\frac{3}{2} \le m < 5$. Vậy điều kiện cần tìm là $-2 \le m < 5$.	*1*
I.2 **1 đ**	Gọi A là tập các học sinh chơi đá cầu B là tập các học sinh chơi cầu lông  Dựa vào biểu đồ ven ta suy ra số học sinh chỉ biết đá cầu là $25 - 15 = 10$ Số học sinh chỉ biết đánh cầu lông là $30 - 15 = 15$ Do đó ta có sĩ số học sinh của lớp $10A_1$ là $10 + 15 + 15 = 40$	*1*
II.1 **2 đ**	Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y-2x \le 2 \\ 2y-x \ge 4 \\ x+y \le 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên 	*1*

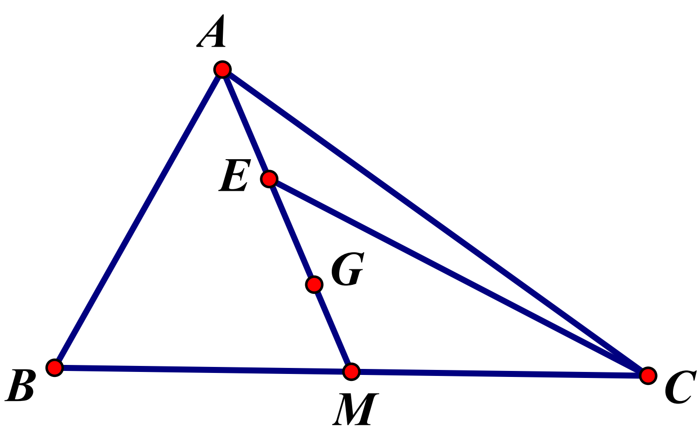
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Đặt F = x – y , khi đó để x – y + 2m – 1 ≤ 0 với mọi x và y thoả mãn hệ $\begin{cases} y-2x\le 2\\ 2y-x\ge 4\\ x+y\le 5\end{cases}$

Thì maxF ≤ 1 – 2m
Ta thấy F = x – y đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C.
Tại $A(0;2)$ thì $F=-2$.
Tại $B(1;4)$ thì $F=-3$
Tại $A(2;3)$ thì $F=-1$.
Vậy maxF = – 1 khi x = 2 và y = 3
Do đó – 1 ≤ 1 – 2m ⇔ m ≤ 1.
Vậy trên đoạn [– 9; 10] có 11 giá trị nguyên của m
</td>
<td>0,5

0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>II.2
2 đ</td>
<td>
Gọi x là số xe loại A $(0\le x\le 10; x\in\mathbb{N})$, y là số xe loại B $(0\le y\le 9; y\in\mathbb{N})$. Khi đó tổng chi phí thuê xe là $T=4x+3y$.
Xe A chở tối đa 20 người, xe B chở tối đa 10 người nên tổng số người 2 xe chở tối đa được là $20x+10y$.
Xe A chở được $0,6$ tấn hàng, xe B chở được $1,5$ tấn hàng nên tổng lượng hàng 2 xe chở được là $0,6x+1,5y$.
Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} 0\le x\le 10\\ 0\le y\le 9\\ 20x+10y\ge 140\\ 0,6x+1,5y\ge 9\end{cases}$ $(*)$


Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $ABCD$ kể cả miền trong của tứ giác.
Biểu thức $T=4x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.
</td>
<td>1

0,5</td>
</tr>
</table>

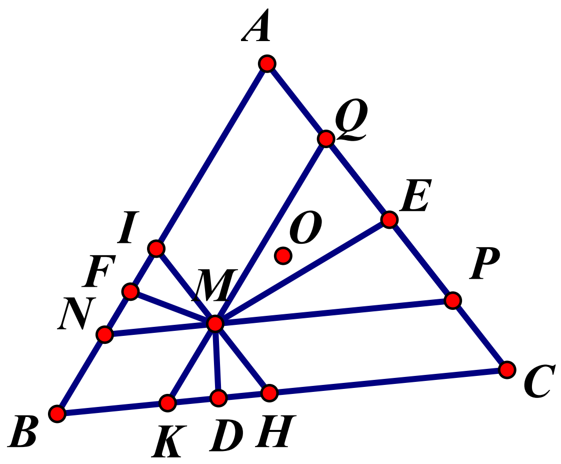
	Tại các đỉnh $A(10;2); B(10;9); C\left(\frac{5}{2};9\right); D(5;4)$, ta thấy T đạt giá trị nhỏ nhất tại $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy để chi phí thấp nhất cần thuê . 5 xe A và 4 xe B.	*0,5*
III.1 2 đ	Áp dụng định lí sin và cosin trong tam giác ABC ta có VP = $\frac{a}{2R}.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{b}{2R}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $=\frac{1}{2R}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) = \frac{c}{2R}$ = sinC = VT (đpcm)	*1* *1*
III.2 2 đ	Từ a = 2b.cosC, áp dụng định lí cosin ta có a = 2b. $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2+b^2-c^2 \Leftrightarrow$ b = c (1) Thay b = c vào $\frac{a^3+c^3-b^3}{a+c-b}=b^2$ ta có $a^2 = b^2$ hay a = b (2) Vậy từ (1) và (2) suy ra ABC đều	*1* *1*
III.3 1 đ	Ta có B = 75^0. Áp dụng định lí sin ta được $\frac{a}{\sin 60^o}=\frac{b}{\sin 75^o}=\frac{c}{\sin 45^o}$ $\Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2b}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=\frac{2c}{\sqrt{2}}$ Theo dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2b}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=\frac{2c}{\sqrt{2}}=\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$ Suy ra a = 3, $b=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, c = $\sqrt{6}$	*0,5* *0,5*
IV.1 2 đ	Ta có $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MG}$ $=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MG}$ $=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{MG}$ $=\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{MG}$ Vậy m = 1 và n = 5 	*1* *1*
IV.2 2 đ	Gọi C(x; y), do H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 4x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$ Vậy C($\frac{1}{2}$; – 1)	*1* *1*

<table>
<tr>
<td>

V.1
1 đ

</td>
<td>

Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác ABC (như hình vẽ) Do ABC đều nên ta có MHCP, MQAI, MNBK là các hình bình hành và MKD, MPQ, MIN là các tam giác cân tại M. Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của KH, PQ, IN



Áp dụng quy tắc trung điểm và hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MH}}{2}+\frac{\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}}{2}+\frac{\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MN}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MH}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MI}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MK}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$$

Mặt khác O là trọng tâm do đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$

Vậy $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

</td>
<td>

0,5

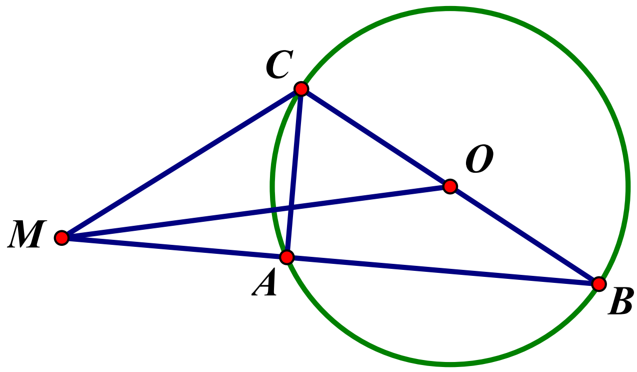
0,5

</td>
</tr>
<tr>
<td>

V.2
1 đ

</td>
<td>

Giả sử A nằm trong đoạn MB. Gọi C đối xứng với B qua tâm O, khi đó CA $\perp$ MB



Ta có $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}=MC.MB.cos\widehat{CMB}$

$=MC.MB.\frac{MA}{MC}=MB.MA$ (1)

Mà $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ cùng hướng nên

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA.MB.cos0^0=MA.MB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}$

$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OB}^2$

$= MO^2 - R^2 = 49 - 25 = 24$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=24$

</td>
<td>

0,5

0,5

</td>
</tr>
</table>

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 10**
https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-10