

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề.

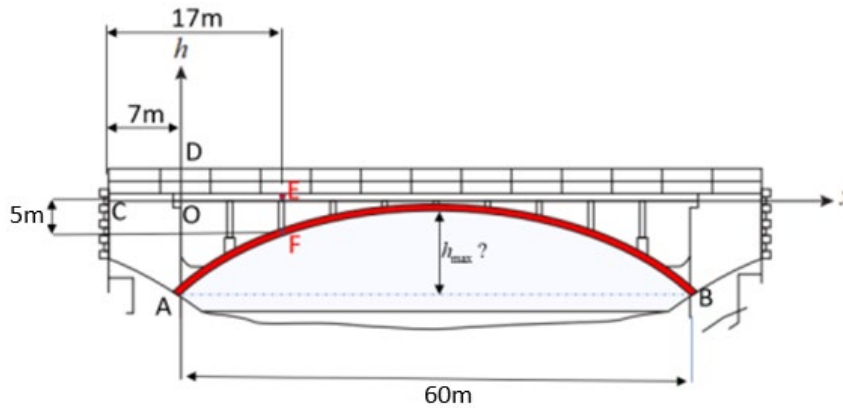
Ngày thi: 20/04/2024

(Đề thi gồm 06 câu; 02 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Cho hàm số $y = x^2 + (2 - m)x - 4$ có đồ thị là (P) và điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

2. Một chiếc cầu được bắc qua sông. Để trợ lực cho cây cầu, người ta làm một vòm đỡ cong hình parabol. Với hệ trục tọa độ xOy được gắn vào như hình vẽ, biết rằng khoảng cách giữa 2 chân của vòm đỡ là $AB = 60m$. Khoảng cách từ chân cầu (điểm C) tới điểm O là $7m$. Tại một điểm cách chân cầu (điểm C) $17m$, người ta đo được khoảng cách từ mặt cầu xuống vòm đỡ là $5m$. Tìm chiều cao tối đa h_{max} của vòm đỡ (khoảng cách từ đỉnh vòm đến đường thẳng AB)



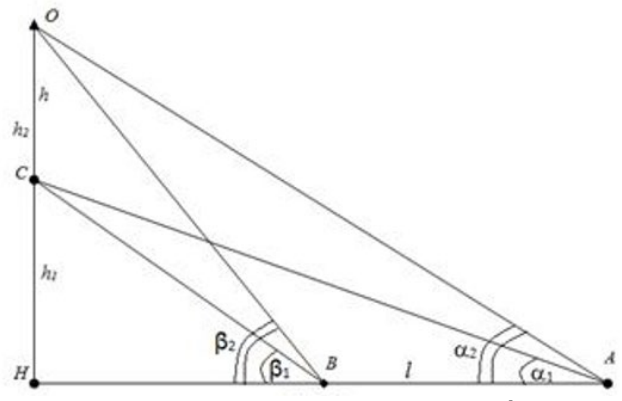
Câu 2 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 - x^3y = 1 \\ x^3y + xy - x^2 = -1 \end{cases}$$

Câu 3 (2,5 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có đỉnh $A(-3;1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 4 (1,0 điểm).



Cột cờ Lũng Cú là một cột cờ quốc gia nằm ở đỉnh Lũng Cú hay còn gọi là đỉnh núi Rồng (Long Sơn) có độ cao khoảng $1.700m$ so với mực nước biển, thuộc xã Lũng Cú, huyện Đồng Văn, tỉnh Hà Giang, nơi điểm cực Bắc của Việt Nam.

Để đo chiều cao của thân tháp cột cờ người ta đứng ở các vị trí A, B là hai điểm ở thung lũng dưới núi cách nhau $15m$ (như hình vẽ) là hai vị trí được chọn để đặt giác kế nhìn đỉnh của thân tháp O và đáy tháp C sao cho bốn điểm A, B, C, O đồng phẳng. Khi tiến hành quan sát người đó đo được các góc $\widehat{CAH} = 25,1^\circ, \widehat{CBH} = 26,5^\circ; \widehat{OAH} = 28,5^\circ; \widehat{OBH} = 30^\circ$ (với H là hình chiếu của O trên đường thẳng AB). Tính chiều cao thân tháp cột cờ.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC đều, có cạnh bằng a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{6}.$$

Câu 6 (2,0 điểm).

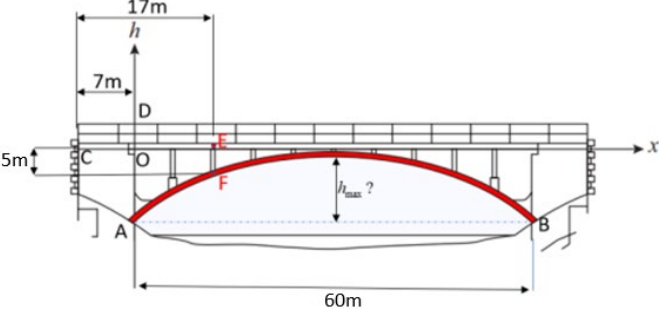
1. Đêm diễn văn nghệ chào mừng sinh nhật Đoàn 26 / 3 năm học 2023 – 2024 tại một trường trung học phổ thông X có 15 tiết mục gồm 7 tiết mục múa, 5 tiết mục tốp ca, 3 tiết mục đơn ca. Có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự các tiết mục biểu diễn sao cho tiết mục đầu tiên và tiết mục cuối cùng là tốp ca, đồng thời không có hai tiết mục nào cùng thể loại biểu diễn liên tiếp nhau?

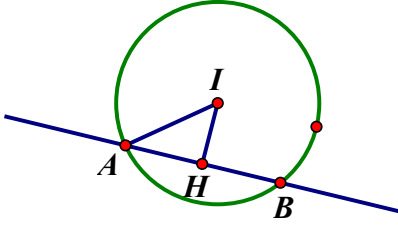
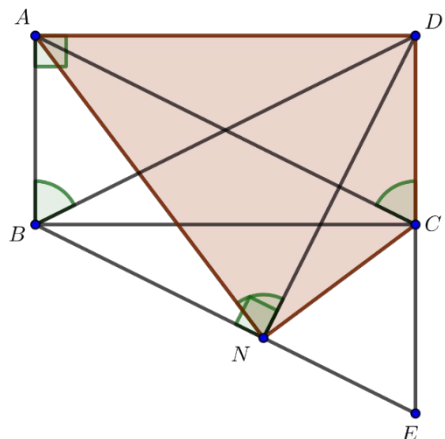
2. Tính tổng: $S = 2^2 C_{2025}^2 - 3^2 C_{2025}^3 + \dots + (-1)^k k^2 C_{2025}^k + \dots - 2025^2 C_{2025}^{2025}$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN
(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1.1	Cho hàm số $y = x^2 + (2 - m)x - 4$ có đồ thị là (P) và điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).	1,0
	Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + (2 - m)x - 4 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x - 4 - m = 0(*)$ Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M và N thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (3 - m)^2 - 4(-4 - m) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 25 > 0, \forall m$.	0,25
	Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$. Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 - m \end{cases} (1)$ Ta có: $M(x_1; -x_1 + m), N(x_2; -x_2 + m)$	0,25
	Vì $OAMN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = x_1 - x_2 \\ 5 = x_2 - x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = -5 (2)$	0,25
	Kết hợp (1) và (2) ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m - 8}{2} \\ x_2 = \frac{m + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ $\left(\frac{m - 8}{2}\right) \cdot \left(\frac{m + 2}{2}\right) = -4 - m$ Vậy $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.	0,25
1.2	Một chiếc cầu được bắc qua sông. Để trợ lực cho cây cầu, người ta làm một vòm đỡ cong hình parabol. Với hệ trục tọa độ xOy được gắn vào như hình vẽ, biết rằng khoảng cách giữa 2 chân của vòm đỡ là $AB = 60m$. Khoảng cách từ chân cầu (điểm C) tới điểm O là $7m$. Tại một điểm cách chân cầu (điểm C) $17m$, người ta đo được khoảng cách từ mặt cầu xuống vòm đỡ là $5m$. Tìm chiều cao tối đa h max của vòm đỡ (khoảng cách từ đỉnh vòm đến đường thẳng AB).	1,0

		
	<p>Parabol $h(x)$ có đỉnh nằm trên trục Ox và nằm hoàn toàn dưới trục Ox với hệ tọa độ như hình vẽ nên suy ra phương trình của $h(x)$ có dạng $h(x) = a(x - k)^2$ với $(a < 0)$</p>	0,25
	<p>Do $AB = 60$ nên hoành độ của đỉnh parabol là 30. Do đó $k = 30$. Ta có $OE = 17 - 7 = 10$, suy ra tọa độ điểm F nằm trên parabol là $F(10; 5)$</p>	0,25
	<p>Thay tọa độ $F(10; 5), k = 30$ vào phương trình parabol ta có:</p> $-5 = a(10 - 30)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{80}$ <p>Ta có phương trình parabol $h(x) = -\frac{1}{80}(x - 30)^2$</p>	0,25
	<p>Độ dài h_{\max} của vòm đỡ cũng chính là độ dài đoạn OA.</p> <p>Ta có $OA = h(0) = \left -\frac{1}{80}(0 - 30)^2 \right = \frac{90}{8} = 11,25m$</p>	0,25
2	<p>Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 - x^3y = 1 \\ x^3y + xy - x^2 = -1 \end{cases}$</p> <p>Ta có : $x^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy)^2 + 2x^3y$.</p> <p>Đặt $\begin{cases} a = x^2 - xy \\ b = x^3y \end{cases}$, hệ phương trình trở thành : $\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ -a + b = -1 \end{cases}$</p> <p>Suy ra $a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$.</p> <p>Với $a = 1$ ta tính được $b = 0$. Với $a = -2$ ta tính được $b = -3$.</p> <p>TH1: $\begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - xy = 1 \\ x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$</p> <p>TH2: $\begin{cases} x^2 - xy = -2 \\ x^3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{3}{x^2} = -2 \\ y = \frac{-3}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 + 3 = 0 \\ y = \frac{-3}{x^3} \end{cases}$ (vô nghiệm).</p> <p>Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là: $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.</p>	1,5 0,5 0,25 0,5 0,25

	<p>Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.</p>	1,0
3.1	<div style="text-align: center;">  </div> <p>- Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ có tâm $I(-1;4)$ và bán kính $R = 5$</p> <p>- Đường thẳng d' song song với đường thẳng d nên phương trình của d' là: $3x + 4y + m = 0 (m \neq -2)$</p>	0,25
	<p>- Kẻ $IH \perp d' \Rightarrow HA = HB = 3$ và IH là khoảng cách từ I đến d':</p> $IH = \frac{ -3 + 4 + m }{5} = \frac{ m + 1 }{5}$	0,25
	<p>Xét tam giác vuông $IHA: IH^2 = IA^2 - HA^2 = 25 - 9 = 16$</p> $\Leftrightarrow \frac{(m + 1)^2}{25} = 16 \Leftrightarrow m + 1 = 20.$	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} m = 19 \Rightarrow d': 3x + y + 19 = 0 \\ m = -21 \Rightarrow d': 3x + y - 21 = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$ <p>Vậy có hai đường thẳng là: $3x + 4y + 19 = 0; 3x + 4y - 21 = 0$</p>	0,25
	<p>Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$, có đỉnh $A(-3;1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.</p>	1,5
3.2	<div style="text-align: center;">  </div> <p>Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{BND} = 180^\circ$, suy ra tứ giác $ADBN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AND} = \widehat{ABD}$.</p> <p>Mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật).</p> <p>Suy ra tứ giác $ANCD$ nội tiếp được một đường tròn.</p> <p>Mặt khác, $\widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ANC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.</p> <p>Do đó $AN \perp CN$.</p>	0,5

	Xét tam giác HBC vuông tại H , có $BC = 260,43m$, $\widehat{CBH} = 26,5^\circ$, ta có $h_1 = CH = 260,43 \cdot \sin 26,5^\circ$ hay $h_1 \approx 116,2m$ (*)	0,25
	Xét tam giác ABO , có $AB = 15m$, $\widehat{OAH} = 28,5^\circ$, $\widehat{OBH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{OBA} = 150^\circ$. Do đó ta có $\widehat{AOB} = 1,5^\circ$: . Áp dụng định lí sin vào tam giác ABO , ta có: $\frac{BO}{\sin \widehat{OAH}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Rightarrow BO = \frac{15 \sin 28,5^\circ}{\sin 1,5^\circ} \approx 273,42m$	0,25
	-Xét tam giác HBO vuông tại H , có $BO = 273,42m$, $\widehat{OBH} = 30^\circ$, ta có: $h_2 = OH = 273,42 \cdot \sin 30^\circ = 136,71m$ + Từ (*) và (**), ta có: $h = h_2 - h_1 = 20,51$ Vậy chiều cao của thân tháp cột cờ trên đỉnh núi Lũng Cú là khoảng: $20,51m$.	0,25
	Cho tam giác ABC đều, có cạnh bằng a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{6}$	1,0
	Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và G cố định. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = (3\overrightarrow{MG})^2$ $\Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9\overrightarrow{MG}^2$	0,25
5	Ta lại có $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$ $= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ $= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} = 3MG^2 + 3GA^2$ $= 3MG^2 + 3\left(\frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3MG^2 + a^2$	0,25
	Ta có (*) $\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}^2 + a^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9\overrightarrow{MG}^2$ $\Rightarrow (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 3\overrightarrow{MG}^2 - \frac{a^2}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{6} = 3\overrightarrow{MG}^2 - \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}^2 = \frac{2a^2}{9} \Leftrightarrow MG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$	0,25
	Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$	0,25
6.1	Đêm diễn văn nghệ chào mừng sinh nhật Đoàn 26 / 3 năm học 2023 – 2024 tại một trường trung học phổ thông X có 15 tiết mục gồm 7 tiết mục múa, 5 tiết mục tốp ca, 3 tiết mục đơn ca. Có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự các tiết mục biểu diễn sao cho tiết mục đầu tiên và tiết mục cuối cùng là tốp ca, đồng thời không có hai tiết mục nào cùng thể loại biểu diễn liên tiếp nhau?	1,0

	<p style="color: red; margin: 0;">Múa</p> <p style="margin: 0;">TC TC</p> <p style="margin: 0; text-decoration: underline;">6 vách ngăn</p>	0,25
	+ Chọn 2 tiết mục tốp ca (TC) và sắp xếp vào đầu và cuối để biểu diễn có: $C_5^2 \times 2!$ cách.	0,25
	+ Sắp xếp 7 tiết mục múa (hình vẽ) có 7! cách.	0,25
	+ Sắp xếp 3 tiết mục tốp ca và 3 tiết mục đơn ca vào 6 vách ngăn (theo hình vẽ) có 6! cách.	0,25
	Vậy có: $C_5^2 \times 2! \times 7! \times 6! = 72576000$ cách sắp xếp	0,25
6.2	Tính tổng: $S = 2^2 C_{2025}^2 - 3^2 C_{2025}^3 + \dots + (-1)^k k^2 C_{2025}^k + \dots - 2025^2 C_{2025}^{2025}$.	1,0
	<p>Trước hết ta chứng minh đẳng thức:</p> $k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1} \quad (1) \quad (2 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}^*)$ <p>Thật vậy do $k^2 C_n^k = k(k-1)C_n^k + kC_n^k \quad (2)$.</p> <p>Mà:</p> $kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1} \quad (3)$ <p>Áp dụng (3) hai lần ta được:</p> $(k-1) \cdot kC_n^k = (k-1) \cdot nC_{n-1}^{k-1} = n \cdot (k-1) \cdot C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (4)$ <p>Từ (2), (3), (4) ta được (1).</p>	0,25
	<p>Áp dụng (1) ta được:</p> $S = \sum_{k=2}^{2025} (-1)^k \cdot k^2 \cdot C_{2025}^k = \sum_{k=2}^{2025} (-1)^k \cdot (2025 \cdot 2024 \cdot C_{2023}^{k-2} + 2025 \cdot C_{2024}^{k-1})$ $= 2024 \cdot 2025 \cdot \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k \cdot (-1)^k - 2025 \cdot \sum_{k=1}^{2024} C_{2024}^k \cdot (-1)^k$	0,25
	<p>Ta lại có: $\sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k \cdot (-1)^k = (1-1)^{2023} = 0$</p> $\sum_{k=1}^{2024} C_{2024}^k \cdot (-1)^k = (1-1)^{2024} - 1 = -1$	0,25
	Nên $S = 2024 \cdot 2025 \cdot 0 - 2025 \cdot (-1) = 2025$.	0,25

----- Hết -----

Lưu ý khi chấm bài:

- Đáp án chỉ trình bày một cách giải bao gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Nếu học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó không được điểm.
- Học sinh được sử dụng kết quả phần trước để làm phần sau.
- Trong lời giải bài hình, nếu học sinh không vẽ hình thì cho tối đa một nửa số điểm. Nếu học sinh vẽ sai hình thì không cho điểm.
- Điểm toàn bài tính lẻ đến 0,25 và không làm tròn.