TRƯỜNG THPT ĐÀO DUY TỪ
TỔ TOÁN - TIN

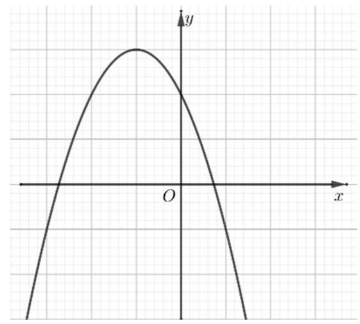
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHỐI 10
NĂM HỌC: 2023- 2024
MÔN THI:TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút(không kể thời gian giao đề)

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. ***Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24 Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn 1 phương án***

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{(x-1)^2\sqrt{x}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **B.** $D=(0;+\infty)$ **C.** $D=[0;+\infty)\setminus\{1\}$ **D.** $D=(0;+\infty)\setminus\{1\}$

Câu 2. Cho biết Parabol $y=ax^2+bx+c$ có dạng đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau



A. $a<0,b<0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$. **C.** $a<0,b<0,c<0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

Câu 3. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1. Biết có hai điểm $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ thuộc (P) sao cho AB đi qua $O(0;0)$, $AB=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ và $y_2-y_1=4(x_2-x_1)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của a bằng

A. $\dfrac{16}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-m}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** 2022.

Câu 5 . Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1>0$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R}, x^2>x$.

C. $\exists r\in\mathbb{Q}, r^2=7$. **D.** $\forall n\in\mathbb{N}$, $n+4$ chia hết cho 4.

Câu 6. Cho $A=(-\infty;5)$, $B=(-\infty;a)$ với a là số thực. Tìm a để $A\setminus B=\varnothing$

A. $a\ge 5$. **B.** $a\le 5$. **C.** $a=5$. **D.** $a>5$.

Câu 7. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $x^2-2y+1>0$. **B.** $x-3y+1<0$. **C.** $x+y^2-2>0$ **D.** $x+y+z-2<0$.

Câu 8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}|x|\le 3\\ |y-2|\le 2\end{cases}$ có diện tích bằng bao nhiêu?

A. 36. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 24.

Câu 9. Cho $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$ với $0^0<\alpha<90^0$. Giá trị biểu thức $A=\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$ bằng:

A. $A=-\dfrac{17}{8}$. **B.** $A=\dfrac{17}{8}$. **C.** $A=\dfrac{1}{8}$. **D.** $A=\dfrac{7}{8}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có góc A tù thỏa mãn $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ và $AB=2AC$. Tỉ lệ $\dfrac{AC}{BC}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{38}}{19}$. **C.** $\frac{\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{7}{18}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Hỏi $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véctơ nào?

A. $\overrightarrow{AM}$. **B.** $\overrightarrow{PB}$. **C.** $\overrightarrow{AP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$.

Câu 12. Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng 30^0. Gọi $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$. Giá trị $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-0,08;-0,07)$. **B.** $(-0,1;-0,09)$. **C.** $(-0,2;-0,1)$. **D.** $(-0,09;-0,08)$.

Câu 13. Cho tam giác ABC biết $AB=5, AC=6, BC=7$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN=x(0<x<6)$. Hệ thức nào sau đây **đúng** ?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}\right)\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}\right)\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)\overrightarrow{CA}$

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-1=0$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ là các số nguyên sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn $AB \le \frac{\sqrt{210}}{5}$.

A. 28. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 26.

Câu 15. Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua $A(3;2)$ và nhận $\vec{v}=(4;2)$ làm vectơ chỉ phương là:

A. $3x-2y+4=0$. **B.** $2x+y-8=0$. **C.** $x-2y-7=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Câu 16. Cho ba điểm $A(-6;\ 3)$, $B(0;\ -1)$, $C(3;\ 2)$. Gọi điểm $M(a;b)$ trên đường thẳng $d: 2x-y+3=0$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b$ bằng

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 17. Cho hai điểm $A(-1;3), B(1;1)$. Gọi (d) là đường thẳng có hệ số góc $k<-1$ và cắt đoạn thẳng AB sao cho $d(A;d)+d(B,d)=\sqrt{2}$. Giá trị k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-3,5;\ -3,1)$. **B.** $(-3,8;\ -3,5)$. **C.** $(-3,1;\ -2,5)$. **D.** $(-2,5;\ -1,5)$.

Câu 18. Chọn ngẫu nhiên một số từ 100 số nguyên dương đầu tiên, xác suất để số được chọn chia hết cho 4 bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{13}{50}$. **C.** $\frac{6}{25}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 19. Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số?

A. 120. **B.** 216. **C.** 100. **D.** 180.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Từ A ta dựng 5 đường thẳng, từ B ta dựng 8 đường thẳng, từ C ta dựng 7 đường thẳng. Cho biết trong các đường thẳng này không có 3 đường thẳng nào đồng quy và không có cặp đường thẳng nào song song. Số tam giác tạo thành bởi các giao điểm của các đường thẳng đã dựng trừ 3 điểm A, B, C bằng

A. 366145. **B.** 2963220. **C.** 390145. **D.** 360108.

Câu 21. Trên giá sách có 1 cuốn sách toán, 3 cuốn sách lý, 2 cuốn sách hóa (các cuốn sách cùng môn đôi một khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra các cuốn sách trong các cuốn trên sao cho có đủ 3 môn toán, lý, hóa?

A. 21. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 22. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C vào sáu ghế xếp thành một hàng ngang (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế). Tính xác suất để học sinh lớp C không ngồi cạnh học sinh lớp B.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{30}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 23. Trong khai triển biểu thức $(2x+1)(x-1)^8$ thành đa thức, hệ số của x^5 bằng

A. 140. **B.** 84. **C.** 56. **D.** 196.

Câu 24. Một hộp có 4 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 4, 3 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 3 và 6 viên bi vàng được đánh số từ 1 đến 6. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi, xác suất để chọn được 3 viên bi vừa khác màu vừa khác số là

A. $\frac{9}{143}$. **B.** $\frac{36}{143}$. **C.** $\frac{16}{143}$. **D.** $\frac{18}{143}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. ***Thí sinh trả lời từ câu 25 đến câu 29. Trong mỗi ý a). b). c). d). ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 25. Cho tam giác ABC và các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

a. Tổng $\frac{AM}{AB} + \frac{BN}{BC}$ bằng $\frac{17}{12}$.

b. $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ thì $x - y = \frac{1}{2}$.

c. Tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ và điểm K thuộc AC thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BK} + \alpha\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ thì $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{4}$.

d. Tam giác ABC đều thì $\cos\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right) = \frac{-11}{\sqrt{91}}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{(x-2m+1)(x-m)}$ có tập xác định D.

a. Với $m = 0$ thì $D = (-1;0)$.

b. $(1;+\infty) \subset D$ khi và chỉ khi $m < 1$.

c. Với mọi số thực m thì $D \cap (-2;2) \neq \varnothing$.

d. Có 11 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left[f(x)\right]^2$ có đỉnh I và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB nhỏ hơn 27.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;2), B(-3;4)$.

a. $AB = 2\sqrt{5}$.

b. Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 5.

c. Với điểm M tùy ý, giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2$ bằng $\frac{40}{3}$.

d. Điểm $M(a;b)$ di chuyển trong đoạn thẳng AB. Tổng các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a + b = \frac{5}{2}$.

Câu 28. Một nhóm 10 học sinh gồm 5 học sinh nam trong đó có đúng một bạn tên An và 5 học sinh nữ trong đó có đúng một bạn tên Bình được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 10 cái ghế trên một hàng ngang.

a. Số cách xếp 10 học sinh trên là 3628800.

b. Xác suất để An và Bình ngồi hai đầu ghế là $\frac{1}{90}$.

c. Xác suất để 5 bạn nam ngồi kề nhau là $\frac{1}{42}$.

d. Xác suất để nam và nữ ngồi xen kẽ, đồng thời An không ngồi cạnh Bình là $\frac{8}{1575}$.

Câu 29. Cho một đa giác đều (H) có 18 cạnh.

a. Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H) là 816.

b. Số tam giác cân có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H) là 144.

c. Số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của (H) là 36.

d. Chọn hai tam giác vuông có các đỉnh là đỉnh của (H), xác suất để chọn được hai tam giác vuông có cùng chu vi là $\frac{35}{143}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. ***Thí sinh trả lời từ câu 30 đến câu 35.***

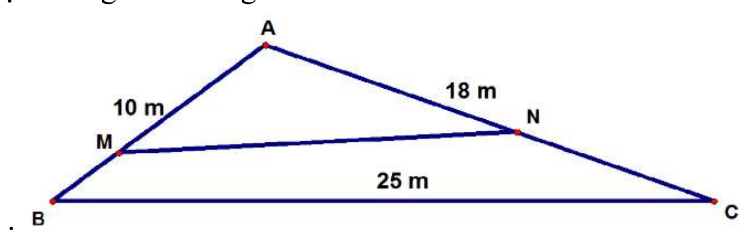
Câu 30. Người ta dùng 100 số nguyên dương đầu tiên để đánh số cho 100 tấm thẻ (mỗi thẻ đánh một số). Chọn ngẫu nhiên bốn thẻ trong 100 thẻ đó. Tính xác suất để chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho 9 (quy tròn đến phần trăm).

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|x^2 - 4x + a\right|$ trên đoạn $[1;3]$. Tổng tất cả các giá trị của a để $2M - 3m = 1$ bằng bao nhiêu?

Câu 32. Để tổ chức cho đoàn viên ưu tú khối 12 đi thực tế. Đoàn trường THPT Đào Duy Từ đã thuê xe để đưa 180 đoàn viên và 8 tấn hành lý đi thực tế. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó xe A có 10 chiếc, xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một xe loại B cho thuê với giá 4 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể trở tối đa 30 người và 0,8 tấn hàng, mỗi xe loại B có thể trở tối đa 20 người và 1,6 tấn hàng. Tìm tổng số xe cần thuê cả hai loại xe A và B sao cho chi phí thuê xe là thấp nhất.

Câu 33. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1, điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 1$. Giá trị nhỏ nhất của đoạn MA bằng bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)?

Câu 34. Một người có một miếng đất hình tam giác ABC (hình vẽ dưới) với $AB = 10m$, $AC = 18m$, $BC = 25m$. Ông ấy muốn chia miếng đất thành hai phần có diện tích bằng nhau cho hai người con của ông ta. Tuy nhiên vì phần đất phía AB, AC là hai mặt đường nên người đó phải chia theo đoạn thẳng MN (hình vẽ) để 2 người con đều có 2 phần mặt đường. Sau đó người cha phải xây đoạn tường MN cao $2m$ để chia đất, chi phí để xây mỗi mét vuông tường hết 200.000 đồng. Số triệu đồng (*làm tròn đến hàng phần trăm*) chi phí ít nhất để xây đoạn tường MN bằng bao nhiêu?



Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm cạnh BC và điểm $N\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AN}$, đường thẳng MD có phương trình $x = 1$ và tung độ điểm D là một số âm. Biết $A(a;b), B(c;d)$, tổng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ bằng bao nhiêu?

....................**HẾT**...................

ĐÁP ÁN

PHẦN I:

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	D	A	A	A	A	A	B	D	B	C	C	D
Câu	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	D	A	D	D	B	A	D	D	A	B	B	D

PHẦN II

CÂU	Câu 25	Câu 26	Câu 27	Câu 28	Câu 29
Đáp án	Đ	S	Đ	Đ	Đ
	S	S	Đ	S	S
	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
	S	Đ	Đ	Đ	Đ

PHẦN III

CÂU	Câu 30	Câu 31	Câu 32	Câu 33	Câu 34	Câu 35
Đáp án	0,54	10,5	7	0,13	6,7	26

Phần I: Có 24 câu trắc nghiệm với 4 lựa chọn, mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm.
Phần II: Có 5 câu đúng/ sai, mỗi câu tối đa 1,0 điểm; Trả lời đúng 1 ý được 0,1 điểm; đúng 2 ý được 0,25 điểm; đúng 3 ý được 0,5 điểm; đúng 4 ý được 1,0 điểm.
Phần II: Có 6 câu trả lời ngắn, mỗi câu 0,5 điểm.

Lời giải chi tiết một số câu VD-VDC

Câu 3. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1. Biết có hai điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thuộc (P) sao cho AB đi qua $O(0;0), AB=\frac{3\sqrt{17}}{2}$ và $y_2-y_1=4(x_2-x_1)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của a bằng

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Ta có $y_2-y_1=4(x_2-x_1) \Leftrightarrow k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=4 \Rightarrow$ phương trình $AB: y=4x$ (vì AB đi qua $O(0;0)$).

$(P): y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-1 \Rightarrow c=-1$

Phương trình hoành độ giao điểm của AB và (P) là: $ax^2+bx-1=4x \Leftrightarrow ax^2+(b-4)x-1=0 (*)$

Phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Rightarrow A(x_1;4x_1), B(x_2;4x_2)$

Ta có $AB=\frac{3\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow AB^2=\frac{153}{4} \Leftrightarrow 17(x_2-x_1)^2=\frac{153}{4} \Leftrightarrow (x_2+x_1)^2-4x_1x_2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{(b-4)^2}{a^2}+\frac{4}{a}=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4(b-4)^2+16a=9a^2 \Leftrightarrow 9a^2-16a=4(b-4)^2 \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 0 \\ a\geq \frac{16}{9} \end{array}\right.$. Vì $a>0 \Rightarrow a_{\min}=\frac{16}{9}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có góc A tù thỏa mãn $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ và $AB=2AC$. Tỉ lệ $\frac{AC}{BC}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{38}}{19}$. **C.** $\frac{\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{7}{18}$.

Lời giải:

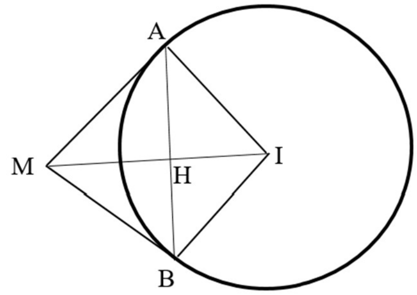
Đặt $AB=c, BC=a, CA=b$, ta có $c=2b$

Theo định lý Cosin ta có $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=5b^2+4b^2.\frac{1}{3}=\frac{19}{3}b^2\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{19}}=\frac{\sqrt{57}}{19}$.

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-1=0$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ là các số nguyên sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn $AB\le\frac{\sqrt{210}}{5}$.

A. 28 . **B.** 24 . **C.** 20 . **D.** 26 .

Lời giải:

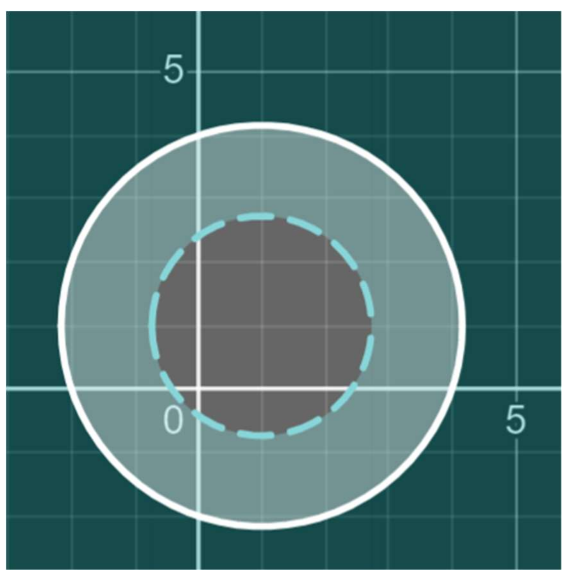


Ta có $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=3\Rightarrow(C)$ có tâm $I(1;1), R=\sqrt{3}$.

Gọi $H=IM\cap AB\Rightarrow AH\perp IM$

Ta có $AH=\frac{AB}{2}\le\frac{\sqrt{210}}{10}\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}\ge\sqrt{3-\frac{21}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow IM=\frac{IA^2}{IH}\le\sqrt{10}$.

Gọi $M(x;y)$, ta có $\sqrt{3}<IM\le\sqrt{10}\Leftrightarrow 3<(x-1)^2+(y-1)^2\le 10$ (*)



Vẽ các đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=3,(C_2):(x-1)^2+(y-1)^2=10$, suy ra có 28 điểm có tọa độ nguyên thuộc miền (*).

Câu 17. Cho hai điểm $A(-1;3), B(1;1)$. Gọi (d) là đường thẳng có hệ số góc $k<-1$ và cắt đoạn thẳng AB sao cho $d(A;d)+d(B,d)=\sqrt{2}$. Giá trị k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-3,5;\ -3,1)$. **B.** $(-3,8;\ -3,5)$. **C.** $(-3,1;\ -2,5)$. **D.** $(-2,5;\ -1,5)$.

Lời giải:

Gọi $I=(d)\cap AB$, H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên (d).

Ta có $d(A;d)+d(B,d)=AH+BK=IA.\sin(d,AB)+IB.\sin(d,AB)=AB.\sin(d,AB)$

$=2\sqrt{2}.\sin(d,AB)=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin(d,AB)=\frac{1}{2}\Rightarrow (d,AB)=30^0$..

Ta có $\tan(d,AB)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\left|\frac{k-k_{AB}}{1+k.k_{AB}}\right|=\left|\frac{k+1}{1-k}\right|=\sqrt{3}|k+1|=|k-1|\Leftrightarrow \sqrt{3}(k+1)=k-1$ (vì $k<-1$)

$\Leftrightarrow k=\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\approx -3,73\in(-3,8;\ -3,5)$.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ cho 3 điểm A,B,C không thẳng hàng. Từ A ta dựng 5 đường thẳng, từ B ta dựng 8 đường thẳng, từ C ta dựng 7 đường thẳng. Cho biết trong các đường thẳng này không có 3 đường thẳng nào đồng quy và không có cặp đường thẳng nào song song. Số tam giác tạo thành bởi các giao điểm của các đường thẳng đã dựng trừ 3 điểm A,B,C bằng

A. 366145. **B.** 2963220. **C.** 390145. **D.** 360108.

Lời giải:

Trước hết ta tìm số các giao điểm (trừ 3 điểm A,B,C) trên một đường thẳng xuất phát từ A là $8+7=15$. Vì có 5 đường thẳng xuất phát từ A nên có $5(8+7)=75$ giao điểm trên các giao điểm xuất phát từ A. Tương tự có $8(5+7)=96$ giao điểm trên các giao điểm xuất phát từ B và có $7(5+8)=91$ giao điểm trên các giao điểm xuất phát từ C.

Vì mỗi giao điểm đều đến từ 2 trong 3 điểm A,B,C nên mỗi giao điểm được kể 2 lần. Vậy số giao điểm (trừ 3 điểm A,B,C) là $\frac{1}{2}(75+96+91)=131$, suy ra số bộ 3 giao điểm là C_{131}^3.

Để mỗi bộ 3 điểm tạo thành một tam giác khi chúng không thẳng hàng, số các bộ 3 điểm thẳng hàng trên 5 đường thẳng xuất phát từ A là $5C_{15}^3$, số các bộ 3 điểm thẳng hàng trên 8 đường thẳng xuất phát từ B là $8C_{12}^3$, số các bộ 3 điểm thẳng hàng trên 7 đường thẳng xuất phát từ C là $7C_{13}^3$.

Suy ra số tam giác tạo được là $C_{131}^3-5C_{15}^3-8C_{12}^3-7C_{13}^3=360108$.

Câu 21. Trên giá sách có 1 cuốn sách toán, 3 cuốn sách lý, 2 cuốn sách hóa (các cuốn sách cùng môn đôi một khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra các cuốn sách trong các cuốn trên sao cho có đủ 3 môn toán, lý, hóa?

A. 21. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải:

Các trường hợp xảy ra khi chọn sách

Sách	Toán	Lý	Hóa
Số lượng	1	1	1
	1	2	1
	1	3	1
	1	1	2
	1	2	2

Số cách lấy sách thỏa mãn là $C_3^1.C_2^1+C_3^2.C_2^1+C_3^3.C_2^1+C_3^1.C_2^2+C_3^2.C_2^2+C_3^3.C_2^2=21$ cách.

Câu 22. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C vào sáu ghế xếp thành một hàng ngang (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế). Tính xác suất để học sinh lớp C không ngồi cạnh học sinh lớp B.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{30}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải:

Xếp ngẫu nhiên sáu học sinh vào sáu ghế có $6!=720$ cách sắp xếp.

TH1: học sinh lớp C xếp ở đầu hàng, có 2 cách xếp học sinh lớp C, có 3 cách chọn 1 học sinh lớp A xếp cạnh học sinh lớp C và có 4! cách xếp 4 học sinh còn lại.

TH2: học sinh lớp C không xếp ở đầu hàng, có 4 cách xếp học sinh lớp C, có A_3^2 cách chọn 2 học sinh lớp A xếp sát cạnh học sinh lớp C và có 3! cách xếp 3 học sinh còn lại.

Nên ta có xác suất: $P=\dfrac{2.3.4!+4.A_3^2.3!}{720}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 25. Cho tam giác ABC và các điểm M,N thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB},\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

a. Tổng $\dfrac{AM}{AB}+\dfrac{BN}{BC}$ bằng $\dfrac{17}{12}$.

b. $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ thì $x-y=\dfrac{1}{2}$.

c. Tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ và điểm K thuộc AC thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}+\alpha\overrightarrow{CM}=\vec{0}\ (\alpha\in\mathbb{R})$ thì $\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{3}{4}$.

d. Tam giác ABC đều thì $\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right)=\dfrac{-11}{\sqrt{91}}$..

Lời giải:

a. Ta có $\dfrac{AM}{AB}+\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{17}{12}$.

b. Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\ y=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow x-y=\dfrac{-1}{2}$.

c. Đặt $\overrightarrow{CK}=x\overrightarrow{CA}$

Ta có $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}=\left(\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)=\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CB}=x\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Ta có $\alpha\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}+\alpha\overrightarrow{CM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BK}=\alpha\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}\right)\Leftrightarrow x\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\dfrac{7\alpha}{12}\overrightarrow{CB}-\dfrac{\alpha}{3}\overrightarrow{CA}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\alpha}{3}\\ -1=\dfrac{7\alpha}{12}\end{cases}$

Suy ra $x=\dfrac{4}{7}\Rightarrow\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{3}{4}$.

d. Đặt $AB=a$. Ta có:

$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}=\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BC}\right)=\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2=\dfrac{-11}{24}a^2$.

$AN=\dfrac{a\sqrt{13}}{4},AN=\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}}{AN.CM}=\dfrac{\dfrac{-11}{24}}{\dfrac{\sqrt{13}}{4}.\dfrac{\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{-11}{2\sqrt{91}}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{(x-2m+1)(x-m)}$ có tập xác định D.

a. Với $m=0$ thì $D=(-1;0)$.

b. $(1;+\infty)\subset D$ khi và chỉ khi $m<1$.

c. Với mọi số thực m thì $D\cap(-2;2)\neq\varnothing$.

d. Có 11 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có đỉnh I và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB nhỏ hơn 27.

Lời giải:

a. Với $m=0$ thì $f(x)=\sqrt{(x+1)x} \Rightarrow f(x)$ xác định $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow D=(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.

b. $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 2m-1 \\ x\ge m \end{array}\right. (m\ge 2m-1)(1)$ hoặc $\left[\begin{array}{l} x\le m \\ x\ge 2m-1 \end{array}\right. (m<2m-1)(2)$.

Để $(1;+\infty)\subset D \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2m-1 \\ m\le 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m<2m-1 \\ 2m-1\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 1$.

c. Ta có $D=(-\infty;m]\cup[2m-1;+\infty)$ hoặc $D=(-\infty;2m-1]\cup[m;+\infty)$

Xét $(-2;2)\subset \mathbb{R}\setminus D \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -2<2\le 2m-1 \\ 2m-1\le -2<2\le m \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\varnothing \Rightarrow D\cap(-2;2)\ne\varnothing, \forall m\in\mathbb{R}.$

d. Ta có $y=\left[f(x)\right]^2=(x-2m+1)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2m-1 \\ x=m \end{array}\right.$, để đồ thị hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow 2m-1\ne m \Leftrightarrow m\ne 1$. Khi đó $A(m;0), B(2m-1;0)$

$$y=\left[f(x)\right]^2=(x-2m+1)(x-m)=x^2-(3m-1)x+m(2m-1) \Rightarrow I\left(\frac{3m-1}{2};\frac{-(m-1)^2}{4}\right)$$

$$S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}AB.d(I;Ox)=\frac{1}{2}|2m-1-m|.\left|\frac{-(m-1)^2}{4}\right|=\frac{1}{8}\left|(m-1)(m-1)^2\right|=\frac{1}{8}|(m-1)|^3<27$$

$\Leftrightarrow |m-1|<6 \Leftrightarrow -5<m<7$, vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ có 11 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;2), B(-3;4)$.

a. $AB=2\sqrt{5}$.

b. Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 5.

c. Với điểm M tùy ý, giá trị nhỏ nhất của MA^2+2MB^2 bằng $\frac{40}{3}$.

d. Điểm $M(a;b)$ di chuyển trong đoạn thẳng AB. Tổng các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b=\frac{5}{2}$.

Lời giải:

a. Ta có $AB=\sqrt{(-3-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}.$

b. Ta có phương trình $AB: x+2y-5=0 \Rightarrow AB\cap Ox=I(5;0)$.

c. Gọi $M(x;y) \Rightarrow MA^2+2MB^2=(x-1)^2+(y-2)^2+2\left[(x+3)^2+(y-4)^2\right]=3x^2+3y^2+10x-20y+55$

$=3\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{40}{3}\ge\frac{40}{3}$. Vậy $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}=\frac{40}{3}$.

d. Ta có $M\in AB: x+2y-5=0 \Rightarrow M(5-2t;t), t\in[2;4]$

Ta có $d(M,Ox)+d(M,Oy)=|5-2t|+|t|=\begin{cases} 5-t\ge\frac{5}{2},\ khi\ 2\le t\le\frac{5}{2} \\ 3t-5\ge\frac{5}{2}, khi\ \frac{5}{2}\le t\le 4 \end{cases}$.

Vậy $d(M,Ox)+d(M,Oy)_{\min}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \Leftrightarrow M\left(0;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow a+b=\frac{5}{2}$.

Câu 28. Một nhóm 10 học sinh gồm 5 học sinh nam trong đó có đúng một bạn tên An và 5 học sinh nữ trong đó có đúng một bạn tên Bình được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 10 cái ghế trên một hàng ngang.

e. Số cách xếp 10 học sinh trên là 3628800.

f. Xác suất để An và Bình ngồi hai đầu ghế là $\frac{1}{90}$.

g. Xác suất để 5 bạn nam ngồi kề nhau là $\frac{1}{42}$.

h. Xác suất để nam và nữ ngồi xen kẽ, đồng thời An không ngồi cạnh Bình là $\frac{8}{1575}$.

Lời giải:

a. Số cách xếp 10 học sinh là $10! = 3628800$.

b. Số cách xếp để An và Bình ngồi hai đầu ghế là: $2!8! = 80640 \Rightarrow P = \frac{80640}{3628800} = \frac{1}{45}$.

c. Số cách xếp để 5 bạn nam ngồi kề nhau là $5!6! = 86400 \Rightarrow P = \frac{86400}{3628800} = \frac{1}{42}$.

d. Số cách xếp để nam và nữ ngồi xen kẽ là $2.5!5! = 28800$.

Số cách xếp để An không ngồi cạnh Bình là $8!.A_9^2 = 2903040$.

Số cách xếp để nam và nữ ngồi xen kẽ, đồng thời An không ngồi cạnh Bình là $\frac{8}{1575}$.

Câu 29. Cho một đa giác đều (H) có 18 cạnh.

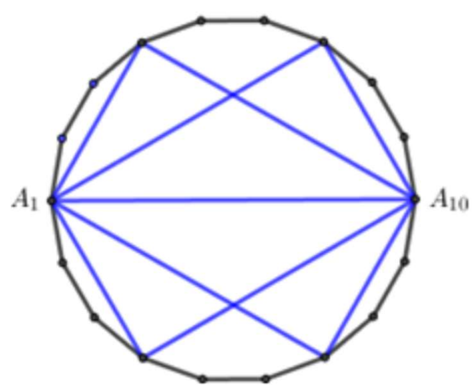
a. Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H) là 816.

b. Số tam giác cân có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H) là 144.

c. Số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của (H) là 36.

d. Chọn hai tam giác vuông có các đỉnh là đỉnh của (H), xác suất để chọn được hai tam giác vuông có cùng chu vi là $\frac{35}{143}$.

Lời giải:



a. Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của C bằng $C_{18}^3 = 816$ (tam giác).

b. Xét tam giác cân đỉnh $A_k (k = \overline{1,18})$, có 8 tam giác cân như vậy

Suy ra số tam giác cân là $18.8 = 144$ (tam giác)

Tuy nhiên trong các tam giác cân nói trên có 6 tam giác đều, theo cách tính trên thì ứng mỗi tam giác đều sẽ được tính thành 3 tam giác cân, nên số tam giác cân thực tế là $144 - 2.6 = 132$ (tam giác).

c. (H) có 9 đường chéo đi qua tâm của (H), mỗi cặp đường chéo như thế chính là 2 đường chéo của một hình chữ nhật thỏa mãn, suy ra số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của (H) là $C_9^2 = 36$.

d. Tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) là tam giác vuông khi chúng có cạnh huyền là đường chéo đi qua tâm của (H) (cũng là đường kính của đường tròn ngoại tiếp (H)).

Mỗi đường chéo đi qua tâm của (H) là cạnh huyền của 16 tam giác vuông, suy ra số tam giác vuông là $16.9=144$

Trong số 144 tam giác vuông này tạo thành 4 nhóm tám giác vuông có cùng chu vi, mỗi nhóm 36 tam giác, suy ra số cách chọn hai tam giác vuông có cùng chu vi là $4C_{36}^{2}=2520$.

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{2520}{C_{144}^{2}}=\dfrac{35}{143}$.

Câu 30. Người ta dùng 100 số nguyên dương đầu tiên để đánh số cho 100 tấm thẻ (mỗi thẻ đánh một số). Chọn ngẫu nhiên bốn thẻ trong 100 thẻ đó. Tính xác suất để chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho 9 (quy tròn đến phần trăm) .

Lời giải:

Chọn ngẫu nhiên 4 thẻ có C_{100}^{4} (cách).

Gọi $A=\left\{3k \middle| k\in\mathbb{N}^{*}, 1\le k\le 33, k \not\vdots\, 3\right\}, B=\left\{9k \middle| k\in\mathbb{N}^{*}, 1\le k\le 11\right\}$

Suy ra A có 22 phần tử, B có 11 phần tử

Gọi biến cố X : " 4 thẻ được chọn để tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho 9 "

Suy ra $\overline{X}$: " 4 thẻ được chọn để tích của các số ghi trên bốn thẻ không chia hết cho 9 "

TH 1: Cả 4 thẻ đều không không chia hết cho 3, suy ra có C_{67}^{4}.

TH 2: Trong 4 thẻ có đúng 1 thẻ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, suy ra có $C_{22}^{1}C_{67}^{3}$.

$$\Rightarrow P(X)=1-P\left(\overline{X}\right)=1-\frac{C_{67}^{4}+C_{22}^{1}C_{67}^{3}}{C_{100}^{4}}\approx 0,54.$$

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^{2}-4x+a\right|$ trên đoạn $[1;3]$. Tổng tất cả các giá trị của a để $2M-3m=1$ bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Đặt $f(x)=x^{2}-4x+a$, lập bảng biến thiên (hoặc dựa vào đồ thị) ta có

$f(2)\le f(x)\le \max\left\{f(1),f(3)\right\}\Leftrightarrow a-4\le f(x)\le a-3$.

+ Nếu $(a-4)(a-3)\le 0\Leftrightarrow 3\le a\le 4\Rightarrow M=\max\left\{|a-3|,|a-4|\right\}, m=0$

Ta có $2M-3m=1\Leftrightarrow M=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}|a-3|=\dfrac{1}{2}\\ |a-3|\ge|a-4|\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}|a-4|=\dfrac{1}{2}\\ |a-3|\le|a-4|\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{7}{2}$

+ Nếu $(a-4)(a-3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<3\\ a>4\end{array}\right.\Rightarrow M=\max\left\{|a-3|,|a-4|\right\}, m=\min\left\{|a-3|,|a-4|\right\}$

- Với $a<3$ thì $M=4-a, m=3-a$

  Ta có $2M-3m=1\Leftrightarrow 2(4-a)-3(3-a)=1\Leftrightarrow a=2$ (thỏa mãn).

- Với $a>4$ thì $M=a-3, m=a-4$

  Ta có $2M-3m=1\Leftrightarrow 2(a-3)-3(a-4)=1\Leftrightarrow a=5$ (thỏa mãn).

Vậy tổng tất cả các giá trị của a bằng $\dfrac{7}{2}+2+5=\dfrac{21}{2}=10.5$.

Câu 33. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1, điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=1$. Giá trị nhỏ nhất của đoạn MA bằng bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)?

Lời giải:

Ta có $3=AB^{2}+BC^{2}+CA^{2}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^{2}+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^{2}+\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right)^{2}$

$=2\left(MA^{2}+MB^{2}+MC^{2}\right)-2\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right)=2\left(MA^{2}+MB^{2}+MC^{2}\right)-2$

$$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5}{2}$$

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=\frac{5}{2}$

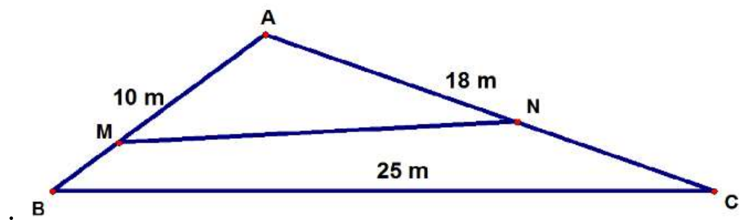
(với G là trọng tâm tam giác ABC)

$$\Leftrightarrow 3MG^2+\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\frac{5}{2}$$

$\Leftrightarrow 3MG^2+1=\frac{5}{2}\Leftrightarrow MG=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\{M\}$ là đường tròn tâm G, bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $GA=\frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $MA_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,13$.

Câu 34. Một người có một miếng đất hình tam giác ABC (hình vẽ dưới) với $AB=10m$, $AC=18m$, $BC=25m$. Ông ấy muốn chia miếng đất thành hai phần có diện tích bằng nhau cho hai người con của ông ta. Tuy nhiên vì phần đất phía AB, AC là hai mặt đường nên người đó phải chia theo đoạn thẳng MN (hình vẽ) để 2 người con đều có 2 phần mặt đường. Sau đó người cha phải xây đoạn tường MN cao $2\,m$ để chia đất, chi phí để xây mỗi mét vuông tường hết 200.000 đồng. Số triệu đồng (*làm tròn đến hàng phần trăm*) chi phí ít nhất để xây đoạn tường MN bằng bao nhiêu?



Lời giải:

Đặt $AM=x, AN=y\ (0<x<10, 0<y<18)$

Ta có $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{S}{2}\Rightarrow y=\frac{S}{x\sin A}$

Áp dụng ĐL Cosin: $MN^2=x^2+y^2-2xy\cos A=x^2+\frac{S^2}{x^2\sin^2 A}-2x\frac{S}{x\sin A}.\cos A$

$$=x^2+\frac{S^2}{x^2\sin^2 A}-2S.\cot A\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{x^2.\frac{S^2}{x^2\sin^2 A}}-2S.\cot A=\frac{2S}{\sin A}-2S.\cot A=\frac{2S\left(1-\cos A\right)}{\sin A}$$

Dấu “=” có khi $x^2=\frac{S^2}{x^2\sin^2 A}\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{S}{\sin A}}$

Ta có $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{10^2+18^2-25^2}{2.10.18}=-\frac{67}{120}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{9911}}{120}$

Ta có $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}10.18.\frac{\sqrt{9911}}{120}=\frac{3\sqrt{9911}}{4}$

$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{S}{\sin A}}=3\sqrt{10}<10, y=3\sqrt{10}<18$ (thỏa mãn).

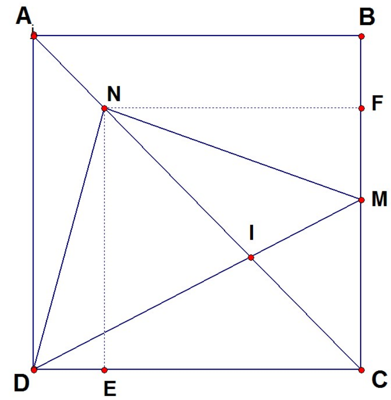
Vậy $MN_{\min}=\sqrt{\frac{2S\left(1-\cos A\right)}{\sin A}}=\frac{\sqrt{1122}}{2}$ (m)

Suy ra chi phí ít nhất để xây đoạn tường MN là :

$$2.MN.200000=200000\sqrt{1122}\approx 6699254 \text{ (đồng)}=6,699254\approx 6,7 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm cạnh BC và điểm

$N\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AN}$, đường thẳng MD có phương trình $x=1$ và tung độ điểm D là một số âm. Biết $A(a;b),B(c;d)$, tổng $a^2+b^2+c^2+d^2$ bằng bao nhiêu?



Lời giải:

Kẻ $NE\perp CD, NF\perp BC$, ta có $NE=NF, DE=FM=\dfrac{AB}{4}\Rightarrow\triangle DNE=\triangle MNF$

$\Rightarrow ND=NM, ND\perp NM\ \Rightarrow\triangle NDM$ vuông cân tại N

$\Rightarrow ND=\sqrt{2}.d\left(N,MD\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ .Ta có $D(1;t)$, $ND^2=\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-2\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}D(1;3)\ (l)\\D(1;-2)\end{array}\right.\Rightarrow M(1;3)$

Gọi $I=AC\cap MD$, ta có $\dfrac{DI}{IM}=\dfrac{AD}{MC}=2\Rightarrow\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow\begin{cases}1-1=3\left(x_I-1\right)\\-2-3=3\left(y_I-3\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=1\\y_I=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

$IC=\dfrac{1}{3}AC, NC=\dfrac{3}{4}AC\Rightarrow\dfrac{NC}{IC}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow\overrightarrow{NC}=\dfrac{9}{4}\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}\left(x_C-1\right)\\y_C-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{4}\left(y_C-\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=3\\y_C=2\end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{CN}=3\overrightarrow{NA}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}-3=3\left(x_A+\dfrac{3}{2}\right)\\\dfrac{1}{2}-2=3\left(y_A-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=-3\\y_A=0\end{cases}$

Vì M là trung điểm BC nên $B(-1;4)$. Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2=\left(-3\right)^2+0^2+\left(-1\right)^2+4^2=26$.