TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ XVIII-HÒA BÌNH 2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XVIII, NĂM 2024
ĐỀ THI MÔN: TOÁN, KHỐI 10
Ngày thi: **02/8/2024**
Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Đề thi gồm: 01 trang

Chú ý: Thí sinh làm mỗi bài toán trên một tờ giấy thi!

Bài 1 (4,0 *điểm*). Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 với hệ số thực.

$a)$ Chứng minh rằng tồn tại bộ số thực $\left(a,b,c,d,e\right)$ thoả mãn

$$P(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-1)(x-2) + cx(x-1) + dx + e, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$b)$ Tìm điều kiện cần và đủ của a,b,c,d,e sao cho $P(x)$ nhận giá trị là số nguyên với mọi số nguyên x.

Bài 2 (4,0 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc tia đối của tia CA $(M \neq C)$. Lấy D đối xứng với B qua M, AD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Đường tròn (ACD) cắt AB tại điểm thứ hai là F.

$a)$ Gọi I là giao điểm khác A của (AEF) và (ABD). Chứng minh rằng $AI//BD$.

$b)$ Gọi S là giao điểm khác A của (AEF) và AC, đường trung trực của SI cắt BD tại J. Chứng minh rằng J, E, F thẳng hàng.

Bài 3 (4,0 *điểm*). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 = 5abc$.

Chứng minh rằng

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 10.$$

Bài 4 (4,0 *điểm*). Trong một chiếc hộp chứa 2024 viên bi có cùng kích thước, trên mỗi viên bi được ghi một số nguyên dương từ 1 đến 2024, hai số ghi trên hai viên bất kì là khác nhau. Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, ghi lại số trên viên bi lên bảng rồi trả lại viên bi vừa lấy vào hộp. Tiếp theo hai bạn Hùng và Vương lần lượt thực hiện như bạn An.

$a)$ Tính xác suất để 3 số ghi được trên bảng giống nhau.

$b)$ Chứng minh rằng xác suất để tổng 3 số ghi được trên bảng là số chính phương bé hơn $\dfrac{1}{46}$.

Bài 5 (4,0 *điểm*). Một bộ số $(x;y;z)$, với x, y, z nguyên dương, được gọi là "*bộ ba tốt của* n" nếu $n = x^2 + y^2 - 5z^2$.

$a)$ Cho $(x;y;z)$ là một bộ ba tốt của 0. Chứng minh $4z^4 - x^2y^2$ chia hết cho 36.

$b)$ Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì luôn tồn tại bộ ba tốt của n.

--------------------------------HẾT--------------------------------

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

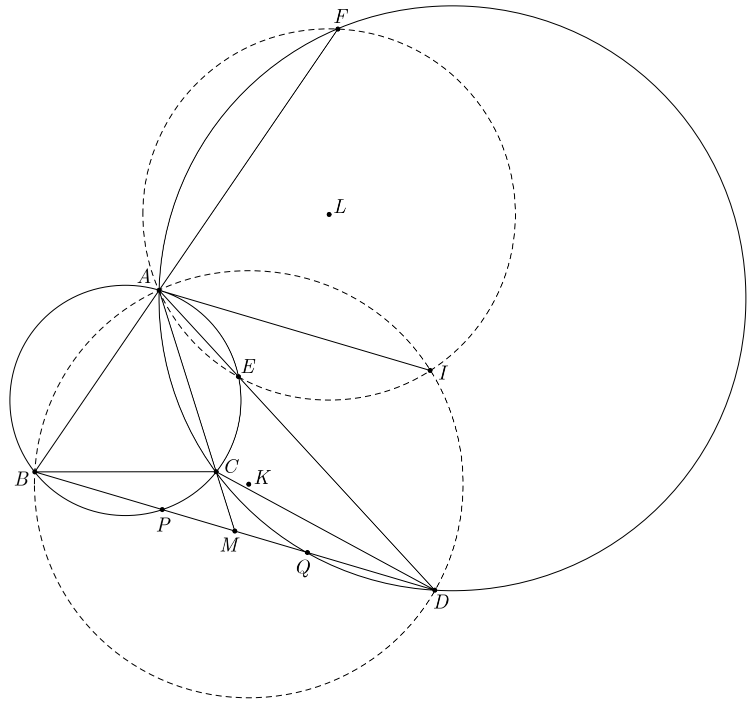
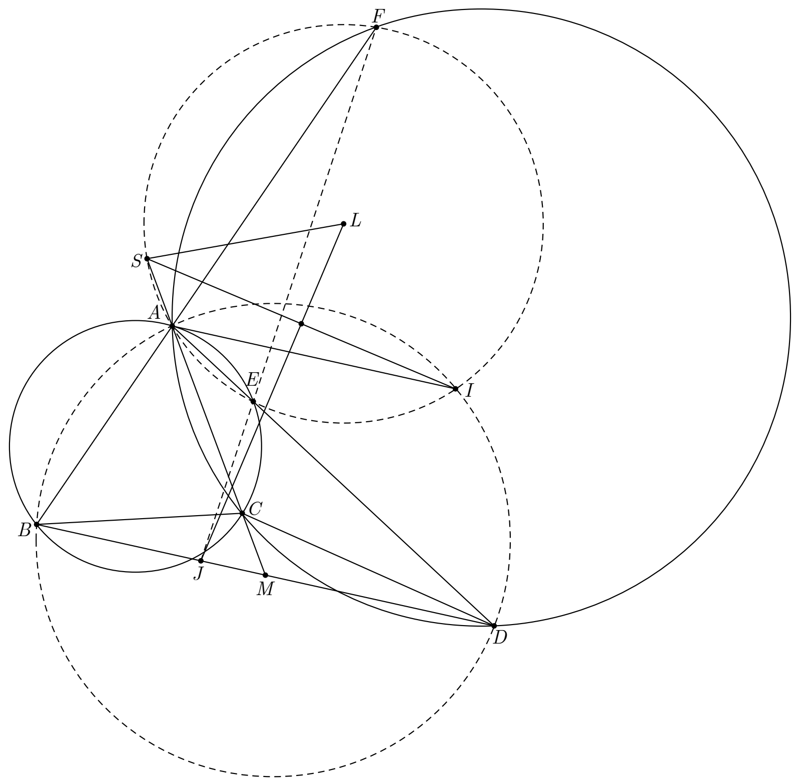
Họ tên thí sinh:…..…………………………………………………………......................

Số báo danh: …..……………………… Phòng thi: …..…………………………

TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ XVIII-HÒA BÌNH 2024

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XVIII, NĂM 2024
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN, KHỐI 10
(*Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang*)

<table>
<tr><th>Bài</th><th>Hướng dẫn</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">(4,0 điểm). Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 với hệ số thực.
$a)$ Chứng minh rằng tồn tại bộ số thực (a,b,c,d,e) thoả mãn
$$P(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)+bx(x-1)(x-2)+cx(x-1)+dx+e,\forall x\in\mathbb{R}.$$
$b)$ Tìm điều kiện cần và đủ của a,b,c,d,e sao cho $P(x)$ nhận giá trị là số nguyên với mọi số nguyên x.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1a</td><td>Ta có $P(0)=e,P(1)=d+e,P(2)=2c+2d+e,P(3)=6b+6c+3d+e,$
$$P(4)=24a+24b+12c+4d+e.$$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Suy ra a,b,c,d,e được xác định như sau:
$e=P(0),d=P(1)-P(0),c=\dfrac{P(2)-2P(1)+P(0)}{2},\ b=\dfrac{P(3)-3P(2)+3P(1)-P(0)}{6}$
và $a=\dfrac{P(4)-4P(3)+6P(2)-4P(1)+P(0)}{24}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Với a,b,c,d,e xác định như trên thì hai đa thức bậc không quá bốn $P(x)$ và $Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)+bx(x-1)(x-2)+cx(x-1)+dx+e$ bằng nhau tại 5 giá trị $x=0;1;2;3;4$ nên $P(x)=Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1b</td><td>Điều kiện cần:
Nếu $P(x)$ luôn là số nguyên mọi số nguyên x thì $P(0),P(1),P(2),P(3),P(4)$ là các số nguyên. Khi đó $e,d,2c,6b,24a$ là các số nguyên.</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>Điều kiện đủ: Giả sử $e,d,2c,6b,24a$ là các số nguyên. Với x là số nguyên bất kỳ, ta có
$$P(x)=24a\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}+6b\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+2c\frac{x(x-1)}{2}+dx+e\in\mathbb{Z}.$$
Do tích của k số nguyên liên tiếp thì chia hết cho $k!$ trong đó $k=2,3,4$.</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">(4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc tia đối của tia CA $(M\neq C)$. Lấy D đối xứng với B qua M, AD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Đường tròn (ACD) cắt AB tại điểm thứ hai là F.
$a)$ Gọi I là giao điểm khác A của (AEF) và (ABD). Chứng minh rằng $AI//BD$.
$b)$ Gọi S là giao điểm khác A của (AEF) và AC, đường trung trực của SI cắt BD tại J. Chứng minh rằng J, E, F thẳng hàng.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2a</td><td>Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của (O), (ACD) với BD và K, L lần lượt là tâm của (ABD), (AEF). Ta có $\overline{MB}.\overline{MP} = \overline{MA}.\overline{MC} = \overline{MD}.\overline{MQ}$.
Vì $MB = MD$ (gt) nên $MP = MQ$. Dẫn đến $BQ = DP$.</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>Từ đó suy ra $\overline{DA}.\overline{DE} = \overline{DB}.\overline{DP} = \overline{BD}.\overline{BQ} = \overline{BA}.\overline{BF}$.
Do đó $P_{B/(AEF)} = P_{D/(AEF)} \Rightarrow LB = LD$. Kết hợp với $KB = KD$ suy ra $KL \perp BD$ (1).
Vì $\{A;\, I\} = (AEF) \cap (ABD)$ nên $KL \perp AI$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AI // BD$.</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Vì $AI // BD$ và M là trung điểm BD nên $A(IMBD) = -1$.
Chiếu lên (AEF) ta thu được $IESF$ là tứ giác điều hòa (3).</td><td>1.0</td></tr>
</table>

	Ta có $\widehat{SLJ} = \frac{1}{2}\widehat{SLI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{SAI} = \widehat{IAM} = \widehat{SMJ}$ (do $AI//BD$). Suy ra tứ giác $SLMJ$ nội tiếp. Dẫn đến $\widehat{LSJ} = \widehat{LMD} = 90^0$. Suy ra JS, JI là các tiếp tuyến của (AEF) (4). Từ (3) và (4) suy ra J, E, F thẳng hàng.	**1.0**
3	(4,0 *điểm*). ***Cho các số thực dương*** a, b, c ***thỏa mãn điều kiện*** $a^3 + b^3 + c^3 = 5abc$. ***Chứng minh rằng*** $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 10.$	
3	Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$. Từ giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 5abc$ suy ra $5 = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) + \frac{c^2}{ab} \geq \frac{1}{c}.2\sqrt{ab} + \frac{c^2}{ab} = 2\frac{\sqrt{ab}}{c} + \frac{c^2}{ab}.$	**1.0**
	Đặt $t = \frac{c}{\sqrt{ab}}, t \geq 1,$ suy ra $5 \geq \frac{2}{t} + t^2 \Leftrightarrow t^3 - 5t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t-1) \leq 0.$ Suy ra $t \leq 2$ hay $c \leq 2\sqrt{ab} \leq a + b.$	**1.0**
	Khi đó ta có $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0$ $\Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$ $\Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 7abc$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 10abc$ $\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 10.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^3+b^3+c^3 = 5abc \\ a = b \\ c = a+b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{c}{2}.$ Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = (t; t; 2t)$ với $t > 0$ hoặc các hoán vị.	**2.0**
4	(4,0 *điểm*). ***Trong một chiếc hộp chứa*** 2024 ***viên bi có cùng kích thước, trên mỗi viên bi được ghi một số nguyên dương từ*** 1 ***đến*** 2024, ***hai số ghi trên hai viên bất kì là khác nhau. Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, ghi lại số trên viên bi lên bảng rồi trả lại viên bi vừa lấy vào hộp. Tiếp theo hai bạn Hùng và Vương lần lượt thực hiện như bạn An.*** $a)$ ***Tính xác suất để*** 3 ***số ghi được trên bảng giống nhau.*** $b)$ ***Chứng minh rằng xác suất để tổng*** 3 ***số ghi được trên bảng là số chính phương bé hơn*** $\frac{1}{46}$.	

<table>
<tr><td rowspan="2">4a</td><td>Ký hiệu $X=\left\{1,\,2,\,\ldots,\,2024\right\}$. Ta có không gian mẫu $\Omega = X^3$ và $\left|\Omega\right| = 2024^3$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Gọi A là biến cố “3 số ghi được trên bảng giống nhau”. Ta có
$$A=\left\{(x,y,z)\in\Omega \mid x=y=z\right\}.$$
Suy ra $\left|A\right| = 2024.$
Do đó $P(A)=\dfrac{1}{2024^2}.$</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4b</td><td>Gọi B là biến cố “tổng 3 số ghi được trên bảng là số chính phương”. Ta có
$$B=\left\{(x,y,z)\in\Omega \mid \exists k\in\mathbb{N}: x+y+z=k^2\right\}.$$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Với mỗi bộ $(x,\,y)\in X^2$, kí hiệu $f(x,y)$ là số cách chọn $z\in X$ sao cho $x+y+z$ là số chính phương. Ta có
$$f(x,y)=\begin{cases}\left[\sqrt{x+y+2024}\right]-\sqrt{x+y+1}+1, \text{ khi} \sqrt{x+y+1}\in\mathbb{Z}\\ \left[\sqrt{x+y+2024}\right]-\left[\sqrt{x+y+1}\right], \text{ khi} \sqrt{x+y+1}\notin\mathbb{Z},\end{cases}$$
ở đây kí hiệu $\left[a\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.
(Công thức trên đơn giản chỉ là đếm số các số chính phương từ $x+y+1$ đến $x+y+2024$).</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>$$f(x,y)\le\sqrt{x+y+2024}-\sqrt{x+y+1}+1, \forall x,y\in X.$$
Do $x+y\ge 2$ nên $\sqrt{x+y+2024}-\sqrt{x+y+1}=\dfrac{2023}{\sqrt{x+y+2024}+\sqrt{x+y+1}}$
$$\le\frac{2023}{\sqrt{2026}+\sqrt{3}}=\sqrt{2026}-\sqrt{3}<44.$$
Vậy $f(x,y)<44+1=45$. Do $f(x,y)$ là số nguyên nên ta có $f(x,y)\le 44, \forall x,y\in X.$
Từ đây ta thu được
$$\left|B\right|=\sum_{(x,\,y)\in X^2} f(x,y)\le 2024^2.44.$$
Chú ý rằng bất đẳng thức trên không thể trở thành đẳng thức vì $f(x,y)$ không thể đồng thời bằng 44. Do đó ta có
$$P(B)<\frac{44}{2024}=\frac{1}{46}.$$</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">(4,0 điểm). Một bộ số $(x;y;z)$, với $x,\,y,\,z$ nguyên dương, được gọi là “bộ ba tốt của n” nếu $n=x^2+y^2-5z^2$.
$a)$ Cho $(x;y;z)$ là một bộ ba tốt của 0. Chứng minh $4z^4-x^2y^2$ chia hết cho 36.
$b)$ Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì luôn tồn tại bộ ba tốt của n.</td></tr>
</table>

5a	Do $(x;y;z)$ là "bộ ba tốt của 0" nên $x^2+y^2=5z^2$. Nếu x,y đều lẻ thì x^2+y^2 chia 4 dư 2. Suy ra z^2 chia 4 dư 2, vô lý. Suy ra $4z^4-x^2y^2 \,\vdots\, 4$.	**0.5**
	Dễ thấy, một số chính phương chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Nếu $z^2 \,\vdots\, 3$ thì $x^2+y^2 \,\vdots\, 3$. Suy ra $x^2 \,\vdots\, 3$, $y^2 \,\vdots\, 3$. Khi đó $4z^4-x^2y^2 \,\vdots\, 9$.	**0.5**
	Nếu $z^2 = 1 \pmod 3$ thì $x^2+y^2 = 2 \pmod 3$. Suy ra $x^2=y^2=1 \pmod 3$.	**0.5**
	Khi đó $(x^2-1)(y^2-1)=0 \pmod 9$, hay $x^2y^2 \equiv x^2+y^2-1 \pmod 9$. Suy ra $4z^4-x^2y^2 \equiv 4z^4-(x^2+y^2-1) \equiv 4z^4-5z^2+1 \equiv (z^2-1)(4z^2-1) \equiv 0 \pmod 9$. Suy ra $4z^4-x^2y^2 \,\vdots\, 36$ do $(9;4)=1$.	**1.0**
5b	Ta có $0=1^2+2^2-5.1^2; 1=10^2+9^2-5.6^2; 2=1^2+9^2-5.4^2; 4=20^2+3^2-5.9^2$	**0.5**
	và $2n+1=(2n)^2+(n+1)^2-5n^2; 2n=(2n-1)^2+(n-2)^2-5(n-1)^2$ suy ra đpcm.	**1.0**