

**A - LÝ THUYẾT**

**I – ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH**

**1. Dấu của tam thức bậc hai:**

- Định nghĩa về tam thức bậc hai.
- Định lí về dấu của tam thức bậc hai.
- Giải bất phương trình bậc hai một ẩn.
- Phương trình quy về phương trình bậc hai.

**2. Đại số tổ hợp**

- Quy tắc cộng và quy tắc nhân.
- Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.
- Nhị thức Newton.

**3. Dãy số-cấp số cộng-cấp số nhân**

- Dãy số, tính tăng giảm, bị chặn của dãy số.
- Cấp số cộng; Cấp số nhân.

**II – HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG**

**1. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng**

- Ba đường conic trong mặt phẳng tọa độ: elip, hyperbol, parabol.
- Ứng dụng ba đường conic trong các bài toán thực tế.

**III – CHUYÊN ĐỀ CHUYÊN SÂU**

**1. Đa thức**

- Định nghĩa đa thức và các phép toán đa thức.
- Phép chia đa thức. Ước và bội. Tính chất của phép chia hết.
- Thuật toán Euclid về phép chia đa thức.
- Hai đa thức nguyên tố cùng nhau.
- Định lí Bezout, Định lí Viet.
- Công thức nội suy Lagrange.

**B – BÀI TẬP THAM KHẢO**

**I – ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH**

**1. Dấu của tam thức bậc hai:**

**Bài 1:** Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ .

b)  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ .

c)  $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

**Bài 2:** Giải các bất phương trình sau

a)  $3x^2 + 4x + 7 > 0$ .

d)  $x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0$

b)  $\frac{1}{x^2 - x + 1} < 1$

e)  $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$

c)  $\frac{1}{x^2 - x + 1} \leq \frac{1}{2x^2 + x + 2}$

f)  $\frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$

**Bài 3:**

a) Tìm  $m$  để tam thức  $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Tìm  $m$  để bất phương trình  $x^2 + 2(m - 2)x + 2m - 1 \geq 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ ?

- d) Tìm  $m$  để bất phương trình  $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0$  có vô số nghiệm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- e) Tìm  $m$  để bất phương trình  $(m-2)x^2 + 2x - 4 \geq 0$  vô nghiệm.

**Bài 4:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để

- a) Phương trình  $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1 > x_2 > -1$ .
- b) Phương trình  $x^2 + 2mx - 2 + 2x = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa  $3x_1 + 2x_2 = 4$ .
- c) Phương trình  $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa  $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$ .

**Bài 5:** Giải các phương trình và bất phương trình sau:

- a)  $\sqrt{3x^2 - 13x + 14} = x - 3$ .
- b)  $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$ .
- c)  $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$ .
- d)  $x^2 - 2x - 8 \geq 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$ .
- e)  $3(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3}) \leq 6x - 27 + 4\sqrt{2x^2 + 5x + 3}$
- f)  $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} \geq \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$
- g)  $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$ .
- h)  $\sqrt[3]{x-2} = 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128$

## 2. Đại số tổ hợp

**Bài 6:** Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , từ tập  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2?

**Bài 7:** Trong một nhóm có 5 người  $A, B, C, D, E$ .

- a) Có bao nhiêu cách xếp năm người này thành hàng ngang sao cho  $A$  và  $B$  đứng cạnh nhau?
- b) Có bao nhiêu cách xếp năm người này thành hàng ngang sao cho  $C$  và  $D$  không đứng cạnh nhau?

**Bài 8:**

- a) Tìm số hạng không chứa  $x$  (số hạng tự do) trong khai triển của  $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$  nếu biết rằng  $C_n^2 - C_n^1 = 44$ .
- b) Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển của  $(1 + x^2 - x^3)^8$ .
- c) Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển nhị thức Newton của  $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$  biết rằng  $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ .

## 3. Dãy số-cấp số cộng-cấp số nhân

**Bài 9.** Xét tính tăng, giảm của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi:

a)  $u_n = \frac{1}{n}$

b)  $u_n = n^2$

c)  $u_n = n - n^2$

d)  $u_n = (-2)^n$

e)  $u_n = \frac{2n+1}{3n-2}$

f)  $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$

**Bài 10:** Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi:

$$a) u_n = \frac{2n+3}{n+2}$$

$$b) u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$c) u_n = n^2 + 4$$

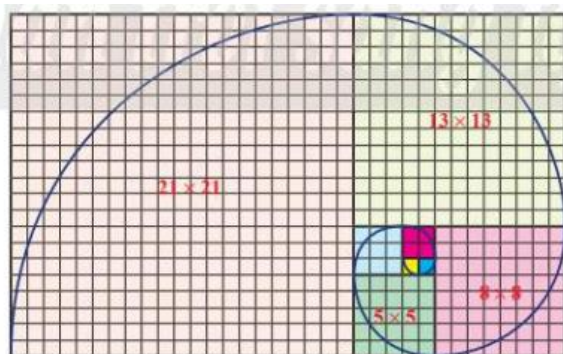
$$d) u_n = \frac{n+1}{3^n}$$

$$e) u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}}$$

$$f) u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$$

**Bài 11:** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_0 = 2; u_1 = 5$  và  $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$  với mọi  $n \geq 1$ . Bằng quy nạp, chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  ta có  $u_n = 2^n + 3^n$ .

**Bài 12.** Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

**Bài 13.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = u_n + (n+1) \cdot 2^n$  với mọi  $n \geq 1$ .

a) Chứng minh rằng  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

b) Chứng minh rằng  $u_n = 1 + (n-1) \cdot 2^n$  với mọi  $n \geq 1$ .

**Bài 14.** Trong các dãy số  $(u_n)$  dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu, công sai và tổng 50 số hạng đầu tiên của nó:

$$a) u_n = 3n - 7$$

$$b) u_n = \frac{3n+2}{5}$$

$$c) u_n = n^2$$

**Bài 15.** Một cấp số cộng có 11 số hạng. Tổng các số hạng là 176, hiệu giữa số hạng cuối và số hạng đầu là 30. Tìm cấp số cộng đó.

**Bài 16.** a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

**Bài 17.** Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng 1, tiếp theo lên là tầng 2, 3, ... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng?

**Bài 18.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  thỏa: 
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$$

a) Tìm số hạng đầu  $u_1$ , công bội  $q$  và tính  $S_{12}$  của cấp số nhân đó.

b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng  $3069$

c) Số 12288 là số hạng thứ mấy?

**Bài 19:** Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$a) \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$$

**Bài 20:** Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

**Bài 21.** Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

#### 4. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

**Bài 22:** Lập phương trình chính tắc của  $(E)$ , biết:

- Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4.
- Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.
- Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự.
- Tiêu cự bằng 8 và đi qua  $M(\sqrt{15}; -1)$ .

**Bài 23:** Viết phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 20 và tiêu cự bằng 12.

**Bài 24:** Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  trong các trường hợp sau:

- $(E)$  đi qua điểm  $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$  và  $M$  nhìn hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  dưới một góc vuông.

**Bài 25:** Lập phương trình chính tắc của Elip  $(E)$  biết:

- Một đỉnh trên trục lớn là  $A(-2; 0)$  và một tiêu điểm  $A(-\sqrt{2}; 0)$ .
- Hai đỉnh trên trục lớn là  $M\left(\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{5}}\right), N\left(-1; \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ .

**Bài 26:** Lập phương trình chính tắc của  $(H)$ , biết:

- Độ dài trục thực bằng 6, trục ảo bằng 4.
- Độ dài trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10.
- Tiêu cự bằng  $2\sqrt{13}$ , một tiệm cận là  $y = \frac{2}{3}x$ .
- Độ dài trục thực bằng 48, tâm sai bằng  $\frac{13}{12}$ .

**Bài 27:** Lập phương trình chính tắc của  $(H)$ , biết:

- Nửa trục thực bằng 2, tiêu cự bằng  $2\sqrt{5}$ .
- Tiêu cự bằng  $4\sqrt{29}$ , một tiệm cận có phương trình  $y = -\frac{2}{5}x$ .
- $(H)$  đi qua  $M(\sqrt{6}; 3)$  và góc giữa hai tiệm cận là  $60^\circ$ .

**Bài 28:** Cho hypebol  $(H)$ . Tìm những điểm  $M \in (H)$  nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

- $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$
- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

**Bài 29:** Lập phương trình chính tắc của  $(P)$ , biết:

- Tiêu điểm  $F(4; 0)$
- Tiêu điểm  $F(3; 0)$
- Đi qua điểm  $M(1; -4)$
- Đi qua điểm  $M(1; -2)$
- Đường chuẩn  $\Delta: x + 2 = 0$
- Đường chuẩn  $\Delta: x + \frac{1}{8} = 0$

**Bài 30:** Lập phương trình chính tắc của  $(P)$ , biết:

- Tiêu điểm  $F$  trùng với tiêu điểm bên phải của elip  $(E): 5x^2 + 9y^2 = 45$ .
- Tiêu điểm  $F$  trùng với tiêu điểm bên phải của hypebol  $(H): 16x^2 - 9y^2 = 144$ .
- Tiêu điểm  $F$  trùng với tâm của đường tròn  $(C): x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ .

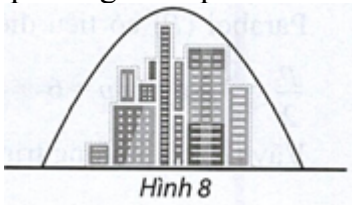
**Bài 31:** Cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y^2 = 4x$ . Tìm tọa độ các điểm  $M$  nằm trên parabol  $(P)$  và cách tiêu điểm một khoảng bằng 3.

**Bài 32:** Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 8m, rộng 20m



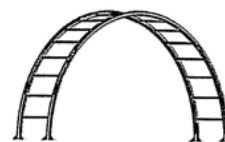
- Chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.
- Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 5m đến nóc nhà vòm.

**Bài 33:** Cổng chào của một thành phố dạng hình parabol có chiều cao  $h = 25m$  và khoảng cách giữa hai chân cổng là  $d = 120m$ . Hãy viết phương trình parabol của cổng chào.

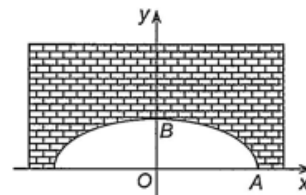


**Bài 34:** Thang leo gợn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao  $100cm$  và khoảng cách giữa hai chân là  $240cm$

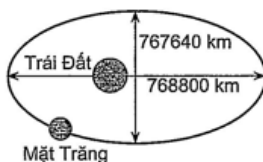
- Hãy chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.
- Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm Hình 11 cách chân khung  $20cm$  lên đến khung thép.



**Bài 35:** Một người kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là  $12m$ , khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là  $3m$ . Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao  $2,8m$  thì có chiều rộng không quá  $3m$ . Hỏi chiếc xe tải có chiều cao  $2,8m$  có thể đi qua hầm được không



**Bài 36:** Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là  $768800km$  và  $767640km$ . Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.



## 5. Đa thức

**Bài 37.** Cho đa thức  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ,  $g(x) = 4x^2 - x + 3$ ,  $h(x) = -x^3 + x^2 + 8$ . Xác định  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x).g(x)$ ,  $h(x^3)$  và  $g \circ h(x)$ .

**Bài 38.** Cho  $f(x) = x^3 - 18x^2 + 115x - 391$ . Tìm số nguyên dương  $x$  để  $f(x)$  là lập phương của một số nguyên dương.

**Bài 39.** Tìm dư của phép chia:

- $x^2 + 1$  cho  $x + 1$ .
- $x^6 + x^3 + 1$  cho  $x^2 + x + 1$ .
- $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$  cho  $x^3 + x^2 + x + 1$ .
- $f(x^{100})$  cho  $f(x)$  với  $f(x) = x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1$ .

**Bài 40.** Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $n$  là số tự nhiên, đa thức  $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$  chia hết cho đa thức  $x^2 + x + 1$ .

**Bài 41.** Chứng minh rằng  $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$ .

**Bài 42.** Phân tích ra thừa số

(1)  $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ .

(2)  $Q(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ .

(3)  $H(x) = x^4 + 1$ .

(4)  $R(x) = x^8 + 1$ .

**Bài 43.** Cho  $f(x) = 2x^5 - 70x^3 + 4x^2 - x + 1$ . Tìm thương và dư của phép chia  $f(x)$  cho  $x - 6$  bằng sơ đồ Horner.

**Bài 44.** Cho  $a$  là số nguyên. Chứng minh rằng phương trình  $x^4 - 7x^3 + (a+2)x^2 - 11x + a = 0$  không có quá một nghiệm nguyên.

**Bài 45.** Tìm  $a, b$  nguyên sao cho phương trình  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$  (1) có hai nghiệm trong số các nghiệm có tích bằng  $-1$ .

**Bài 46.** Xác định đa thức bậc hai nhận giá trị bằng:

a)  $3; 5; -1$  tại  $x = 1; 2; 7$  tương ứng.

b)  $3; 1; 7$  tại  $x = -1; 0; 3$  tương ứng.

**Bài 47.** Chứng minh rằng nếu đa thức bậc hai nhận giá trị nguyên tại 3 giá trị nguyên liên tiếp của biến số  $x$  thì đa thức nhận giá trị nguyên tại mọi giá trị  $x$ .

Đỗ Lê Hải Thụy