

**Câu 1.(4,0 điểm)**

a. Cho hai tập hợp  $A = (-5; 3)$  và  $B = [2; +\infty)$ . Tìm  $A \cap B$ .

b. Cho hai tập hợp  $A = [7; m^2 - m]$ ,  $B = (9; 12]$  với  $A$  là tập hợp khác rỗng. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc  $[0; 2024]$  để  $B \subset A$ .

**Câu 2.(4,0 điểm)**

a. Vẽ đồ thị hàm số  $y = x^2 - 4x + 3$ .

b. Tìm tất cả các tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x} = \sqrt{3m+4x-x^2}$$

**Câu 3.(3,0 điểm)**

Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm loại I và loại II từ 200kg nguyên liệu và một máy chuyên dụng. Để sản xuất được một kilôgam sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và máy làm việc trong 3 giờ. Để sản xuất được một kilôgam sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và máy làm việc trong 1,5 giờ. Biết một kilôgam sản phẩm loại I lãi 300000 đồng, một kilôgam sản phẩm loại II lãi 400000 đồng và máy chuyên dụng làm việc không quá 120 giờ. Hỏi xưởng cần sản xuất bao nhiêu kilôgam sản phẩm mỗi loại để tiền lãi lớn nhất.

**Câu 4. (3,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $AB.AC = 12$  và  $\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tìm diện tích tam giác  $BMG$ .

**Câu 5.(4,0 điểm)**

a. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên đường chéo  $BD$  lấy các điểm  $G$  và  $H$  sao cho  $DG = GH = HB$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ ;  $N$  là giao điểm của  $AG$  và  $DC$ . Chứng minh:  $2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$

b. Cho tứ giác lồi  $ABCD$ , hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại điểm  $O$ . Gọi điểm  $H, K$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABO$  và  $CDO$ . Gọi điểm  $I, J$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $HK \perp IJ$ .

**Câu 6. (2,0 điểm)**

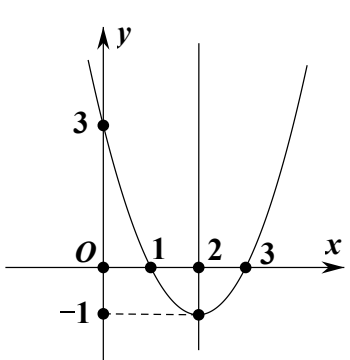
Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  và  $x + y - z = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x+z-1}{y+4}$ .

HƯỚNG DẪN CHẤM

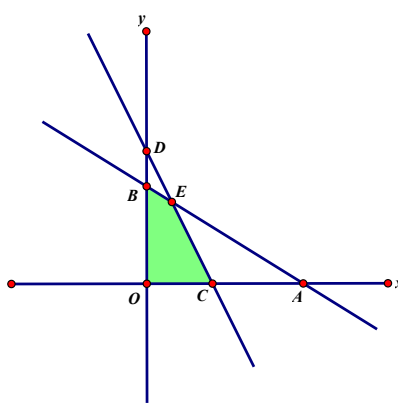
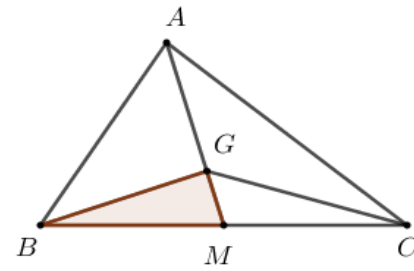
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

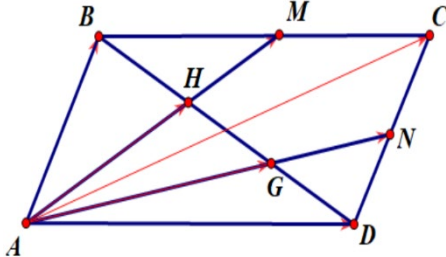
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

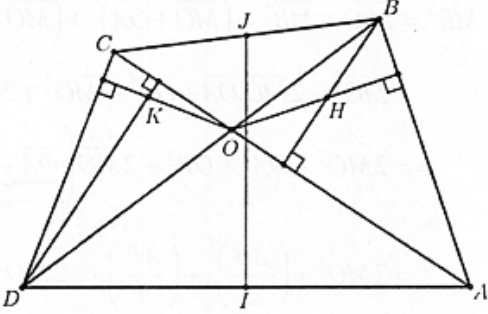
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
1	a. Cho hai tập hợp $A = (-5; 3)$ và $B = [2; +\infty)$ . Tìm $A \cap B$ .	(4,0 điểm)
	b. Cho hai tập hợp $A = [7; m^2 - m]$ , $B = (9; 12]$ với $A$ là tập hợp khác rỗng. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc $[0; 2024]$ để $B \subset A$ .	
	a. $A \cap B = [2; 3)$	2,0
	b. Để $B \subset A$ thì $m^2 - m \geq 12$	1,0
	$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$	0,5
	Vì $m$ nguyên và thuộc $[0; 2024]$ nên có 2021 giá trị	0,5
2	a. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ .	(4,0 điểm)
	b. Tìm tất cả các tham số $m$ để phương trình sau có nghiệm thực	
	$\sqrt{4-x} + \sqrt{x} = \sqrt{3m+4x-x^2}$	
	a. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ . Nêu được tọa độ đỉnh $I(2; -1)$ Nêu đúng phương trình trục đối xứng $x = 2$	1,0
	Nhận xét được giao với các trục hoặc lập đúng bảng giá trị (tối thiểu là ba điểm)	0,5
	Vẽ đúng đồ thị hàm số	0,5
		

	<p>b. ĐKXD <math>0 \leq x \leq 4</math></p> <p>Bình phương hai vế của PT ta được <math>4 + 2\sqrt{4x - x^2} = 3m - x^2 + 4x</math></p> $\Leftrightarrow -(4x - x^2) + 2\sqrt{4x - x^2} + 4 = 3m$ <p>(1)</p>	0,5												
	<p>Đặt <math>\sqrt{4x - x^2} = t</math>, có <math>0 \leq \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq 2 \quad \forall x \in [0; 4]</math></p> <p><math>\Rightarrow t \in [0; 2]</math></p> <p>PT (1) trở thành: <math>-t^2 + 2t + 4 = 3m</math> (2)</p>	0,5												
	<p>Ta có BBT của hàm số <math>f(t) = -t^2 + 2t + 4</math></p> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>t</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(t)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> </tr> </table>	$t$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	$f(t)$	$-\infty$	4	5	4	$-\infty$	0,5
$t$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$									
$f(t)$	$-\infty$	4	5	4	$-\infty$									
	<p>Dựa vào BBT suy ra PT (2) có nghiệm khi <math>4 \leq 3m \leq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}</math></p> <p>Vậy PT ban đầu có nghiệm khi <math>\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}</math>.</p>	0,5												
<b>3</b>	<p>Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm loại I và loại II từ 200kg nguyên liệu và một máy chuyên dụng. Để sản xuất được một kilôgam sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và máy làm việc trong 3 giờ. Để sản xuất được một kilôgam sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và máy làm việc trong 1,5 giờ. Biết một kilôgam sản phẩm loại I lãi 300000 đồng, một kilôgam sản phẩm loại II lãi 400000 đồng và máy chuyên dụng làm việc không quá 120 giờ. Hỏi xưởng cần sản xuất bao nhiêu kilôgam sản phẩm mỗi loại để tiền lãi lớn nhất.</p>	<b>(3,0 điểm)</b>												
	<p>Giả sử sản xuất <math>x(kg)</math> sản phẩm loại I và <math>y(kg)</math> sản phẩm loại II.</p> <p>Điều kiện <math>x \geq 0, y \geq 0</math> và <math>2x + 4y \leq 200 \Leftrightarrow x + 2y \leq 100</math></p> <p>Tổng số giờ máy làm việc: <math>3x + 1,5y</math></p> <p>Ta có <math>3x + 1,5y \leq 120</math></p> <p>Số tiền lãi thu được là <math>T = 300000x + 400000y</math> (đồng).</p> <p>Ta cần tìm <math>x, y</math> thoả mãn: <math display="block">\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 3x + 1,5y \leq 120 \end{cases} \quad \text{(I) sao cho}</math></p> <p><math>T = 300000x + 400000y</math> đạt giá trị lớn nhất.</p>	1,0												

	<p>Trên mặt phẳng tọa độ <math>Oxy</math> vẽ các đường thẳng</p> $d_1 : x + 2y = 100; \quad d_2 : 3x + 1,5y = 120$ 	1,0
	<p>Đường thẳng <math>d_1</math> cắt trục hoành tại điểm <math>A(100;0)</math>, cắt trục tung tại điểm <math>B(0;50)</math>.</p> <p>Đường thẳng <math>d_2</math> cắt trục hoành tại điểm <math>C(40;0)</math>, cắt trục tung tại điểm <math>D(0;80)</math>.</p> <p>Đường thẳng <math>d_1</math> và <math>d_2</math> cắt nhau tại điểm <math>E(20;40)</math>.</p> <p>Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền đa giác <math>OBEC</math>.</p> $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 50 \end{cases} \Rightarrow T = 20000000;$ $\begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow T = 22000000; \quad \begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 12000000$ <p>Vậy để thu được tổng số tiền lãi nhiều nhất thì xưởng cần sản xuất <math>20kg</math> sản phẩm loại I và <math>40kg</math> sản phẩm loại II.</p>	1,0
<b>4</b>	<p>Cho tam giác <math>ABC</math> thỏa mãn: <math>AB.AC = 12</math> và <math>\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A</math>.</p> <p>Gọi <math>M</math> là trung điểm của cạnh <math>BC</math> và <math>G</math> là trọng tâm của tam giác <math>ABC</math>. Tìm diện tích tam giác <math>BMG</math>.</p>	<b>(3,0 điểm)</b>
		

	<p>Đặt <math>BC = a, AC = b, AB = c</math>. Áp dụng định lí sin cho <math>\Delta ABC</math> ta có:</p> $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$	0,5
	<p>Khi đó <math>\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A \Leftrightarrow b + c = a(\cos B + \cos C)</math> (*)</p>	0,5
	<p>Áp dụng định lí cosin cho <math>\Delta ABC</math> ta có:</p> $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ <p>nên (*)</p> $\Leftrightarrow b + c = a \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$ $\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} = 0$ $\Leftrightarrow (c + b)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$	1,0
	<p><math>\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow</math> tam giác <math>ABC</math> vuông tại <math>A</math> và</p> $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 6$	0,5
	<p>Ta có <math>S_{\Delta GBM} = \frac{1}{2} S_{\Delta GBC} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} = 1</math>.</p>	0,5
5	<p>a. Cho hình bình hành <math>ABCD</math>. Trên đường chéo <math>BD</math> lấy các điểm <math>G</math> và <math>H</math> sao cho <math>DG = GH = HB</math>. Gọi <math>M</math> là giao điểm của <math>AH</math> và <math>BC</math>; <math>N</math> là giao điểm của <math>AG</math> và <math>DC</math>. Chứng minh: <math>2\overline{AM} + 2\overline{AN} = 3\overline{AC}</math></p> <p>b. Cho tứ giác lồi <math>ABCD</math>, hai đường chéo <math>AC</math> và <math>BD</math> cắt nhau tại điểm <math>O</math>. Gọi điểm <math>H, K</math> lần lượt là trực tâm các tam giác <math>ABO</math> và <math>CDO</math>. Gọi điểm <math>I, J</math> lần lượt là trung điểm của cạnh <math>AD</math> và <math>BC</math>. Chứng minh rằng <math>HK \perp IJ</math>.</p>	(4,0 điểm)
	<p>a.</p>  <p>Gọi <math>O</math> là tâm của hình bình hành <math>ABCD</math>. Từ gt suy ra <math>O</math> là trung điểm của <math>HM</math></p> <p>Do <math>BM \parallel AD</math> nên <math>\frac{HM}{AH} = \frac{BH}{HD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = \frac{3}{2} AH \Rightarrow \overline{AM} = \frac{3}{2} \overline{AH}</math></p>	1,0

	<p>Chứng minh tương tự ta có <math>\overline{AN} = \frac{3}{2}\overline{AG}</math></p> $2\overline{AM} + 2\overline{AN} = 3(\overline{AG} + \overline{AH}) = 3.2\overline{AO} = 3\overline{AC}$	1,0
	<p>b.</p>  <p>Ta có: <math display="block">\begin{cases} \overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AC} + \overline{CJ} \\ \overline{IJ} = \overline{ID} + \overline{DB} + \overline{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overline{IJ} = \overline{AC} + \overline{DB}.</math></p> <p>Suy ra: <math>\overline{HK}.2\overline{IJ} = \overline{HK}(\overline{AC} + \overline{DB}) = \overline{HK}.\overline{AC} + \overline{HK}.\overline{DB}</math></p> $= (\overline{HB} + \overline{BD} + \overline{DK})\overline{AC} + (\overline{HA} + \overline{AC} + \overline{CK})\overline{DB} = \overline{AC}(\overline{BD} + \overline{DB}) = \overline{AC}.\overline{0}$ <p>Vậy <math>\overline{HK}.\overline{IJ} = 0</math> nên <math>HK \perp IJ</math>.</p>	1,0
6	<p>Cho các số thực <math>x, y, z</math> thỏa mãn <math>x^2 + y^2 + z^2 = 9</math> và <math>x + y - z = 3</math>.</p> <p>Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức <math>P = \frac{x+z-1}{y+4}</math>.</p>	(2,0 điểm)
	<p>Ta có: <math>(x+z)^2 = 2(x^2 + z^2) - (x-z)^2</math></p> $= 2(9 - y^2) - (3 - y)^2 = -3y^2 + 6y + 9$	0,5
	<p>Khi đó: <math>P = \frac{x+z-1}{y+4} \Rightarrow P(y+4) + 1 = x+z</math> nên</p> $[P(y+4) + 1]^2 = (x+z)^2$	0,25
	$\Rightarrow P^2(y+4)^2 + 2(y+4)P + 1 = -3y^2 + 6y + 9$	0,25
	$\Leftrightarrow (P^2 + 3)y^2 + (8P^2 + 2P - 6)y + 16P^2 + 8P - 8 = 0(1)$	0,25
	<p>Phương trình (1) có nghiệm</p> $\Leftrightarrow \Delta' = (4P^2 + P - 3)^2 - (P^2 + 3)(16P^2 + 8P - 8) \geq 0$ $\Leftrightarrow -63P^2 - 30P + 33 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{11}{21}$	0,5
	<p>Vậy <math>P_{\max} = \frac{11}{21}</math> khi <math>y = \frac{8}{19}, x = \frac{56}{19}, z = \frac{7}{19}</math></p> <p>và <math>P_{\min} = -1</math> khi <math>y = 0, x = 0, z = -3</math>.</p>	0,25

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 10  
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-10>