THPT CHUYÊN KHTN
BỘ MÔN CHUYÊN TOÁN

ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN 10
NĂM HỌC 2025 - 2026

Thời gian làm bài: 180 phút
(Lần 1, ngày 7/8/2025)

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và số thực $k \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ka+1} + \frac{1}{kb+1} + \frac{1}{kc+1} \geq \frac{3}{k+1}$$

Bài 2. Cho 2025 số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ khác 0 và không phải tất cả đều bằng nhau. Biết rằng các số này thỏa mãn:

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = a_2 + \frac{1}{a_3} = \cdots = a_{2024} + \frac{1}{a_{2025}} = a_{2025} + \frac{1}{a_1}.$$

Chứng minh rằng tích của 2025 số này không thể bằng 2.

Bài 3. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (p-1)^3 + p^n$$

là số chính phương.

Bài 4. Tìm số nguyên dương lớn nhất k sao cho với mười điểm trong mặt phẳng có tính chất: năm điểm bất kỳ trong mười điểm này đều chứa ít nhất bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn, thì tồn tại k điểm trong mười điểm trên cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. Giả sử có điểm K, L lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA của tam giác ABC sao cho $AL = BK$. Giả sử các đoạn thẳng AK và BL cắt nhau tại điểm P.

a) Gọi giao điểm khác P của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác APL và BPK là T. Chứng minh rằng CT là phân giác $\angle ACB$.

b) Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APL và BPK. Gọi giao điểm của CT và IJ là Q. Chứng minh rằng $IP = JQ$.

-------------------- **HẾT** --------------------

Chương 1

DỰ TUYỂN KHTN 2025

Bài toán 0.1. **(LMF - Dự tuyển KHTN 2025 - P1)**

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và số thực $k \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ka+1} + \frac{1}{kb+1} + \frac{1}{kc+1} \geq \frac{3}{k+1}$$

Lời giải.

Cách 1. Đặt $a = \dfrac{x}{y}, b = \dfrac{y}{z}, c = \dfrac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$

$$VT = \frac{y}{kx+y} + \frac{z}{ky+z} + \frac{x}{kz+x} = \frac{x^2}{kxz+x^2} + \frac{y^2}{kxy+y^2} + \frac{z^2}{kyz+z^2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)}.$$

Để ý $xy + yz + zx \leq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ nên $\dfrac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+(k-2)(xy+yz+zx)} \geq \dfrac{3}{k+1}$.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{1}{ka+1} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{kb+1} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{kc+1} - \frac{1}{k+1}\right) \geq 0$$

$$\frac{k+1-(ka+1)}{(ka+1)(k+1)} + \frac{k+1-(kb+1)}{(kb+1)(k+1)} + \frac{k+1-(kc+1)}{(kc+1)(k+1)} \geq 0$$

$$\frac{k(1-a)}{(ka+1)(k+1)} + \frac{k(1-b)}{(kb+1)(k+1)} + \frac{k(1-c)}{(kc+1)(k+1)} \geq 0$$

Để ý $k > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1-a}{ka+1} + \frac{1-b}{kb+1} + \frac{1-c}{kc+1} \geq 0$$

Quy đồng và rút gọn, bất đẳng thức tương đương với:

$$(1-a)(kb+1)(kc+1) + (1-b)(ka+1)(kc+1) + (1-c)(ka+1)(kb+1) \geq 0$$

Khai triển và sử dụng $abc = 1$:

$$\begin{aligned}
VT &= \sum_{cyc}(1-a)(k^2bc + k(b+c)+1) = \sum_{cyc}(1-a)\left(\frac{k^2}{a} + k(b+c)+1\right) \\
&= \sum_{cyc}\left(\frac{k^2}{a} + k(b+c) + 1 - k^2 - ka(b+c) - a\right) \\
&= k^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2k(a+b+c) + 3 - 3k^2 - 2k(ab+bc+ca) - (a+b+c) \\
&= k^2(ab+bc+ca) + 2k(a+b+c) + 3 - 3k^2 - 2k(ab+bc+ca) - (a+b+c) \\
&= (k^2-2k)(ab+bc+ca) + (2k-1)(a+b+c) - 3(k^2-1)
\end{aligned}$$

Vì $abc = 1$ nên $a+b+c \geq 3$ và $ab+bc+ca \geq 3$.

Để ý $k \geq 2$ nên $k^2 - 2k = k(k-2) \geq 0$ và $2k - 1 > 0$. Do đó:

$$VT \geq (k^2-2k)\cdot 3 + (2k-1)\cdot 3 - 3(k^2-1) = 3k^2 - 6k + 6k - 3 - 3k^2 + 3 = 0$$

Do đó ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 0.2. **(LMF - Dự tuyển KHTN 2025 - P2)**

Cho 2025 số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ khác 0 và không phải tất cả đều bằng nhau. Biết rằng các số này thỏa mãn:

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = a_2 + \frac{1}{a_3} = \cdots = a_{2024} + \frac{1}{a_{2025}} = a_{2025} + \frac{1}{a_1}$$

Chứng minh rằng tích của 2025 số này không thể bằng 2.

Lời giải.

Quy ước $a_{2026} = a_1$ và $a_0 = a_{2025}$.

Ta có $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}} = a_{i-1} + \dfrac{1}{a_i}$ hay $a_i - a_{i-1} = \dfrac{1}{a_i} - \dfrac{1}{a_{i+1}} = \dfrac{a_{i+1} - a_i}{a_i a_{i+1}}$ với $i = 1, 2, ..., 2026$.

Giả sử tồn tại i_0 mà $a_{i_0} = a_{i_0 - 1}$, khi đó $a_{i_0+1} = a_{i_0}$, từ đây dễ dàng suy ra $a_1 = a_2 = ... = a_{2025}$, vô lý.

Do đó $a_i \neq a_{i-1}$ với mọi $i = 1, 2, ..., 2026$. Từ đẳng thức trên, ta có:

$$a_i a_{i+1} = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i - a_{i-1}}$$

Đặt $P = a_1 a_2 \ldots a_{2025}$. Ta có: $P^2 = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \ldots (a_{2024} a_{2025})(a_{2025} a_1)$.

Nhân vế theo vế các biểu thức $a_i a_{i+1}$ với $i = 1, 2, ..., 2025$:

$$P^2 = \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_{2025}}\right)\left(\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1}\right)\left(\frac{a_4 - a_3}{a_3 - a_2}\right)\cdots\left(\frac{a_1 - a_{2025}}{a_{2025} - a_{2024}}\right) = 1$$

Do đó $P^2 = 1$, suy ra $P = 1$ hoặc $P = -1$ nên $P \neq 2$.

Bài toán 0.3. **(LMF - Dự tuyển KHTN 2025 - P3)**

Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $1^3 + 2^3 + \cdots + (p-1)^3 + p^n$ là số chính phương.

Lời giải.

Đầu tiên ta có đẳng thức: $1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = \left[\dfrac{m(m+1)}{2}\right]^2$.

Do đó $1^3 + 2^3 + ... + (p-1)^3 + p^n = \left[\dfrac{p(p-1)}{2}\right]^2 + p^n$.

Đặt $1^3 + 2^3 + ... + (p-1)^3 + p^n = m^2$ với $m \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó ta có được:

$$p^n = m^2 - \left[\frac{p(p-1)}{2}\right]^2$$

$$p^n = \left(m - \frac{p(p-1)}{2}\right)\left(m + \frac{p(p-1)}{2}\right)$$

Do đó ta có thể đặt $m - \dfrac{p(p-1)}{2} = p^a$ và $m + \dfrac{p(p-1)}{2} = p^b$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = n$ và $b > a$.

Trừ hai vế, ta được:

$$p^b - p^a = 2 \cdot \frac{p(p-1)}{2} = p(p-1)$$

$$p^a(p^{b-a} - 1) = p(p-1)$$

Vì p là số nguyên tố và $p^{b-a} - 1$ không chia hết cho p, ta phải có $p^a = p^1$, suy ra $a = 1$.

Thay $a = 1$ vào phương trình ta có $b = 2$, từ đó $n = 3$.

Để ý với $n = 3$ thì $1^3 + 2^3 + ... + p^3 = \left[\dfrac{p(p+1)}{2}\right]^2$ là số chính phương.

Do đó $n = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 0.4. (LMF - Dự tuyển KHTN 2025 - P4)

Tìm số nguyên dương lớn nhất k sao cho với mười điểm trong một mặt phẳng có tính chất: năm điểm bất kỳ trong mười điểm này đều chứa ít nhất bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn, thì tồn tại k điểm trong mười điểm trên cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

Để ý trường hợp 9 điểm cùng một đường tròn và một điểm nằm ngoài thỏa mãn, do đó $k \leq 9$.

Ta sẽ chứng minh $k = 9$ thỏa mãn, tức với 10 điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài, tồn tại 9 điểm cùng thuộc một đường tròn.

Bước 1: Chứng minh tồn tại 5 điểm thuộc một đường tròn.

Giả sử với 10 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán, không có 5 điểm nào thuộc một đường tròn.

Tức là với mọi bộ 5 điểm sẽ chỉ có đúng 4 điểm thuộc một đường tròn.

Gọi N là số lượng các bộ 4 điểm đồng viên, mỗi bộ 4 điểm như vậy thuộc $10 - 4 = 6$ tập gồm 5 điểm.

Đầu tiên ta sẽ đếm bằng hai cách số bộ (a, B) với a là bộ 4 điểm thuộc một đường tròn và B là bộ 5 điểm chứa 4 điểm của bộ a.

- Cố định bộ a, ta có 6 cách chọn bộ B nên số bộ thỏa mãn là $6N$.
- Cố định bộ B, ta có 1 cách chọn a nên số bộ thỏa mãn là C_{10}^5.

Do đó $N = \dfrac{C_{10}^5}{6} = 42$.

Tổng số các bộ 3 điểm được tạo ra từ các đường tròn này là $N.C_4^3 = 42.4 = 168$.

Tuy nhiên số bộ 3 điểm có được từ 10 điểm là $C_{10}^3 = 120$, mà từ nhận xét trên ta suy ra số bộ 3 điểm ít nhất là 168 nên có được mâu thuẫn xảy ra.

Do đó tồn tại một đường tròn chứa ít nhất 5 điểm.

Bước 2: Chứng minh tồn tại 9 điểm thuộc một đường tròn.

Giả sử không có 9 điểm nào đồng viên. Điều này có nghĩa là nếu ta lấy đường tròn (C) chứa số điểm lớn nhất từ tập 10 điểm, thì số điểm trên (C) là m với $5 \leq m \leq 8$.

Do đó, tồn tại ít nhất $10 - 8 = 2$ điểm không nằm trên đường tròn (C). Gọi hai điểm đó là B_1 và B_2.

Gọi tập các điểm trên (C) là $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Vì $m \geq 5$, ta có thể chọn 3 điểm từ A, ví dụ A_1, A_2, A_3. Xét tập 5 điểm $S_1 = \{B_1, B_2, A_1, A_2, A_3\}$.

- Theo đề bài, 4 điểm trong S_1 phải đồng viên.
- Đường tròn duy nhất đi qua A_1, A_2, A_3 là (C). Nhưng $B_1, B_2 \notin (C)$, nên bộ 4 điểm đồng viên không thể là $\{A_1, A_2, A_3, B_i\}$.
- Do đó, bộ 4 điểm đồng viên phải chứa cả B_1 và B_2. Không mất tính tổng quát, giả sử bộ 4 điểm đó là $\{B_1, B_2, A_1, A_2\}$. Các điểm này cùng nằm trên một đường tròn mới, gọi là (C').

Bây giờ, ta lặp lại quy trình với một điểm khác trên (C). Xét tập 5 điểm $S_2 = \{B_1, B_2, A_1, A_2, A_4\}$ (với $A_4 \in A$). Lập luận tương tự, ta sẽ có một bộ 4 điểm đồng viên chứa B_1, B_2. Ví dụ, $\{B_1, B_2, A_1, A_4\}$ cùng thuộc một đường tròn (C'').

Ta thấy rằng đường tròn (C') đi qua $\{B_1, B_2, A_1, A_2\}$ và đường tròn (C'') đi qua $\{B_1, B_2, A_1, A_4\}$ nên ta phải có $(C') \equiv (C'')$.

Điều này có nghĩa là A_4 cũng phải nằm trên đường tròn (C'). Bằng cách lặp lại lập luận này cho mọi điểm $A_k \in A$, ta suy ra tất cả các điểm trong A đều nằm trên đường tròn (C').

Lúc này ta đã chỉ ra rằng tất cả m điểm trong A và hai điểm B_1, B_2 đều cùng nằm trên đường tròn (C'). Như vậy, đường tròn (C') chứa $m + 2$ điểm. Điều này mâu thuẫn điều giả sử rằng m là số lượng điểm

đồng viên lớn nhất. Mâu thuẫn trên cho ta thấy được có ít nhất 9 điểm thuộc một đường tròn.
Do đó $k_{\max} = 9$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét.

Bài toán trên là một bài toán cổ trong đề thi *China MO 1991*, các bạn có thể tìm lời giải khác.
Bài toán tổng quát. Chứng minh rằng với $n \geq 9$ điểm thỏa mãn cứ với 5 điểm bất kì thì có 4 điểm thuộc một đường tròn, khi đó tồn tại $n-1$ điểm thuộc một đường tròn.

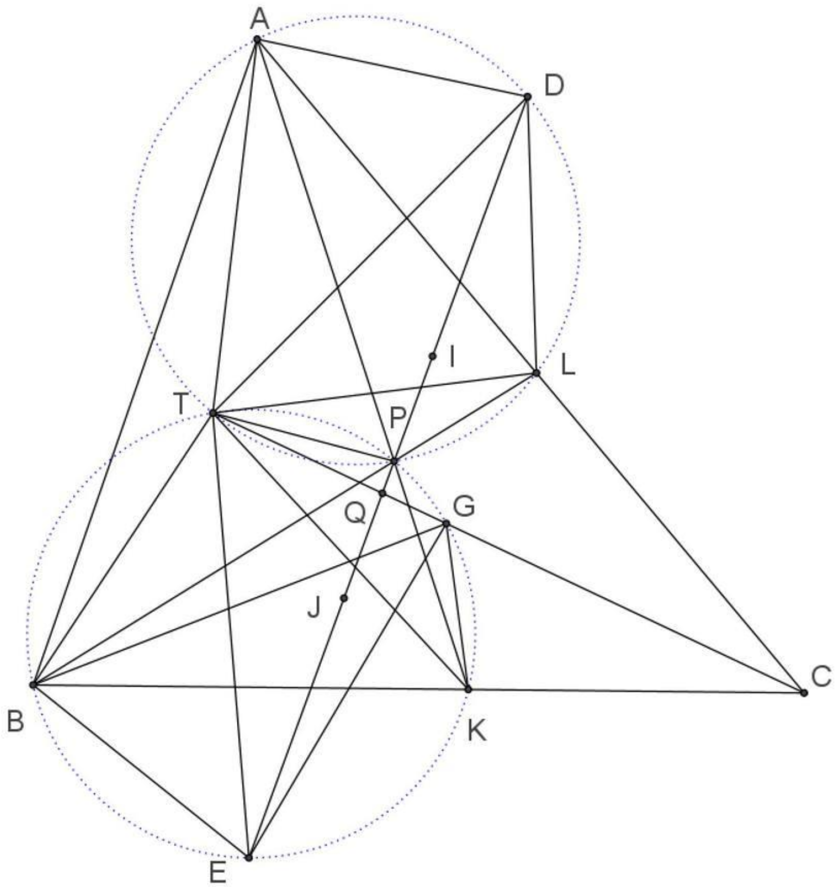
Bài toán 0.5. **(LMF - Dự tuyển KHTN 2025 - P5)**

Giả sử có điểm K, L lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA của tam giác ABC sao cho $AL = BK$. Giả sử các đoạn thẳng AK và BL cắt nhau tại điểm P.

1. Gọi giao điểm khác P của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác APL và BPK là T. Chứng minh rằng CT là phân giác $\angle ACB$.
2. Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APL và BPK. Gọi giao điểm của CT và IJ là Q. Chứng minh rằng $IP = JQ$.

Lời giải.

(Lời giải của bạn Vũ Quốc Khánh)



1. Có $\angle ALT = \angle APT = 180^\circ - \angle TPK = \angle TBK$ nên $BTLC$ là tứ giác nội tiếp.

   Tương tự tứ giác $ATKC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tam giác TAL và tam giác TKB, có $\angle TAL = \angle TKB$, $\angle TLA = \angle TBK$ và $AL = BK$.

Do đó $\triangle TAL = \triangle TKB$ nên $\angle TAL = \angle TKB$.

Vì vậy tam giác BTL và tam giác KTA cân tại T nên $\angle ACT = \angle TAK = \angle TKA = \angle TCB$.

2 Ta có $\angle APL = \angle ATL = \angle BTK = \angle BPK$ nên $\angle API = \angle JPK$ nên I, P, J thẳng hàng.

Gọi IJ cắt (TBK) và (TAL) lần lượt tại hai điểm E, D khác P.

Khi đó E, D lần lượt là các điểm chính giữa cung BK, AL.

Vì $\triangle TKB = \triangle TAL$ nên $\triangle TBE = \triangle TLD$.

Do đó $TD = TE$ nên tam giác TDE cân tại T.

Gọi TC cắt (TBK) tại G khác T.

Khi đó $\triangle GKB = \triangle PLA$ (g-c-g) nên $\angle GTK = \angle GBK = \angle PAL = \angle PTL$.

Do đó $\angle QTE = \angle PTD$.

Mà tam giác TDE cân tại T nên theo tính chất đối xứng ta có $EQ = PD$.

Kết hợp với $EJ = DI$ ta có được $JQ = IP$.