SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang, gồm 6 câu)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025 – 2026

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **150** phút

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$

b) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-4(m+3)x+m^2+6m}}$, với m là tham số. Tìm số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2025;2026)$ để hàm số đã cho xác định trên tập $(-2;1)\cup(4;6)$.

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Trong năm 2026, một cửa hàng kinh doanh xe máy dự định bán hai loại xe máy là xe Lead và xe Vision, với tổng số vốn ban đầu không vượt quá 36 tỉ đồng. Giá nhập về 1 chiếc xe máy Lead là 40 triệu đồng, lợi nhuận dự kiến là 5 triệu đồng một chiếc. Giá nhập về 1 chiếc xe máy Vision là 30 triệu đồng, lợi nhuận dự kiến là 3,2 triệu đồng một chiếc. Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu thị trường không vượt quá 1100 chiếc xe cả hai loại, trong đó nhu cầu xe Lead không vượt quá 1,5 lần nhu cầu xe Vision. Hỏi lợi nhuận dự kiến có thể thu được lớn nhất của cửa hàng là bao nhiêu triệu đồng?

b) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6.$ Gọi T là tập các số thuộc S và mỗi số đó nhỏ hơn 25000. Tìm số phần tử của S và số phần tử của T.

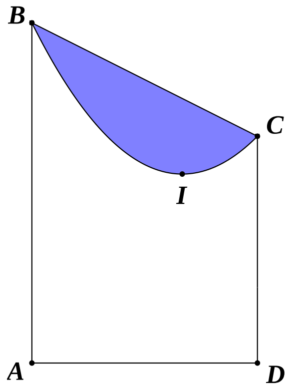
Câu 3. (5,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC vuông tại A và có trọng tâm $G.$ Biết rằng các đỉnh A và B cùng nằm trên trục hoành, đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình $4x-3y-12=0$, diện tích tam giác ABG bằng 8. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $ABC.$

b) Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC=a, AC=b, AB=c$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC và D là chân đường phân giác trong góc A. Giả sử đường thẳng AD cắt đường trung tuyến BM tại điểm H sao cho AH là đường cao của tam giác ABM. Tính giá trị $\tan A$, biết rằng tỉ số giữa độ dài đường trung tuyến BM và độ dài đường phân giác AD bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. (2,0 điểm)

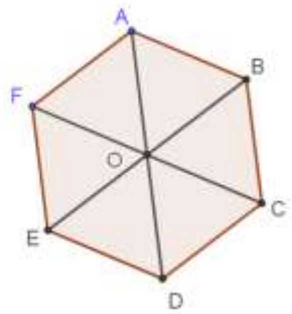
Bác Hùng có một khu vườn hình thang vuông $ABCD$ với $AB = 45m,\ AD = 30m$. Bác ấy đã đào một cái hồ để trồng sen, hồ được bao bởi cạnh BC và đường cong BIC là một phần của đường parabol đỉnh I như hình vẽ.



Bác Hùng muốn làm một con đường đi từ điểm M trên cạnh AD ra một điểm trên mép hồ sen rồi lại từ điểm đó tới một điểm trên cạnh AB. Biết khoảng cách từ I đến AB và AD tương ứng là $20m$ và $25m$, hỏi tổng chiều dài con đường đó ngắn nhất là bao nhiêu mét?

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho tập $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ và lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Có bao nhiêu cách đặt các chữ số trong tập X vào các đỉnh và tâm của lục giác sao cho mỗi vị trí chứa đúng một số(hai vị trí khác nhau đặt hai số khác nhau) đồng thời số ở tâm là một số lẻ và tổng 3 số trên 3 điểm thẳng hàng bằng nhau.



Câu 6. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

$$f(1) \neq f(0) \text{ và } f(f(1)) = f(f(0)) = f(f(-1))$$

---------------------------**HẾT**---------------------------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu;*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

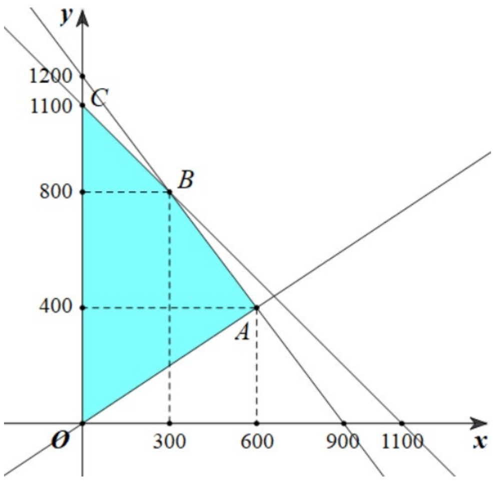
Họ và tên thí sinh: …………………… Số báo danh: ....

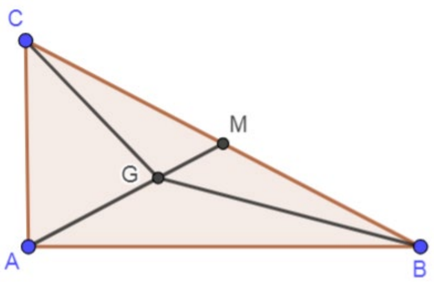
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

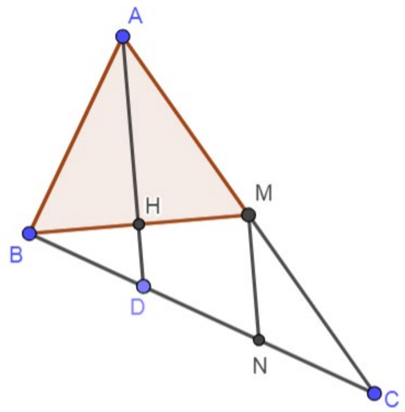
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025– 2026
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 10

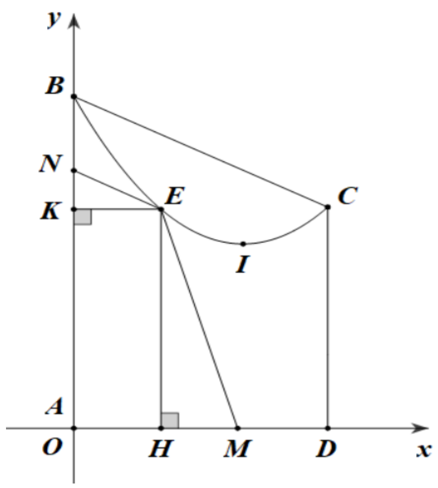
Lưu ý*: *Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều cho điểm tương ứng

Câu 1	**Nội dung**	**Điểm**
	Điều kiện $x \ge -1$. Với $x \ge -1 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}>0$.	
	$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)=2x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)$ $\Leftrightarrow x^2+\sqrt{x^2+4x+3}=x.\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)$	
	$\Leftrightarrow x^2-x\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)(x+1)}-x\sqrt{x+1}=0$ $\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x+3}=0 \\ x-\sqrt{x+1}=0 \end{array}\right.$	
	$x-\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$	
	$x-\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.	
	Điều kiện xác định: $4x^2-4(m+3)x+m^2+6m>0$	
	$4x^2-4(m+3)x+m^2+6m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{m+6}{2} \\ x<\dfrac{m}{2} \end{array}\right.$ Suy ra tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\dfrac{m}{2}\right)\cup\left(\dfrac{m+6}{2};+\infty\right)$. Hàm số xác định trên tập $(-2;1)\cup(4;6) \Leftrightarrow (-2;1)\cup(4;6)\subset D$	
	TH1: $(-2;1)\cup(4;6)\subset\left(-\infty;\dfrac{m}{2}\right) \Leftrightarrow 6\le\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m\ge 12$	
	TH2: $(-2;1)\cup(4;6)\subset\left(\dfrac{m+6}{2};+\infty\right) \Leftrightarrow \dfrac{m+6}{2}\le -2 \Leftrightarrow m\le -10$	
	TH3: $\begin{cases} (-2;1)\subset\left(-\infty;\dfrac{m}{2}\right) \\ (4;6)\subset\left(\dfrac{m+6}{2};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le\dfrac{m}{2} \\ \dfrac{m+6}{2}\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$	
	Số giá trị nguyên của $m\in(-2025;2026)$ là $-10-(-2024)+1+2025-12+1+1=4030$.	
	Gọi $x,\ y$ lần lượt là số xe máy Lead và số xe máy Vision nhập về ($x,y\ge 0$).	

	Lợi nhuận dự kiến là $F(x;y)=5x+3,2y$ (triệu đồng).	
	Tổng số vốn ban đầu không vượt quá 36 tỉ đồng nên ta có: $40x+30y\le 36000$.	
	Tổng nhu cầu thị trường không vượt quá 1100 chiếc xe cả hai loại nên ta có: $x+y\le 1100$.	
	Nhu cầu xe Lead không vượt quá 1,5 lần nhu cầu xe Vision nên ta có: $x\le \frac{3}{2}y$.	
	Cần tìm $x,\ y\in\mathbb{N}$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x\ge 0\\ y\ge 0\\ 40x+30y\le 36000\\ x+y\le 1100\\ x\le \frac{3}{2}y\end{cases}$ sao cho biểu thức $F(x;y)$ lớn nhất.	
		
	Miền nghiệm của hệ là tứ giác $OABC$ với $O(0;0),\ A(600;400),\ B(300;800),\ C(0;1100)$.	
	Ta Có $F(0;0)=0$, $F(600;400)=4280$, $F(300;800)=4060$, $F(0;1100)=3520$. Do đó lợi nhuận dự kiến lớn nhất có thể thu được là 4280 triệu đồng.	
	Gọi $n=\overline{abcde}$ là số chẵn có 5 chữ số khác nhau. Ta có $e\in\{0,2,4,6\}$. **Trường hợp 1:** $e=0$ ○ Có **1** cách chọn e. ○ Chọn 4 chữ số còn lại từ 6 chữ số còn lại và sắp xếp: A_6^4 cách. ○ Số các số: $1\times A_6^4=\mathbf{360}$ số.	
	• **Trường hợp 2:** $e\in\{2,4,6\}$ ○ Có **3** cách chọn e. ○ a có **5** cách chọn (khác 0 và khác e). ○ Chọn 3 chữ số còn lại từ 5 chữ số còn lại và sắp xếp: A_5^3 cách. ○ Số các số: $3\times 5\times A_5^3=15\times 60=\mathbf{900}$ số. ○ **Vậy** $\lvert S\rvert=360+900=1260$ **(phần tử).**	

	○ Tìm số phần tử của T. Vì $n < 25000$ và $a \neq 0$, nên $a \in \{1,2\}$. • **Trường hợp 1:** $a = 1$ (Số có dạng $\overline{1bcde}$) Để n chẵn, $e \in \{0,2,4,6\}$. ○ Chọn e: có **4** cách. ○ Chọn bộ (b,c,d) từ 5 chữ số còn lại: $A_5^3 = 60$ cách. ○ Số các số: $4 \times 60 = \mathbf{240}$ số.		
	• **Trường hợp 2:** $a = 2$ (Số có dạng $\overline{2bcde}$) Vì $n < 25000$ nên $b < 5$ và $b \neq 2$, suy ra $b \in \{0,1,3,4\}$. ○ $b \in \{1,3\}$ **(b lẻ)** ▪ Chọn b: **2** cách. ▪ Chọn e chẵn từ $\{0,4,6\}$ (không chọn được 2 vì $a = 2$): **3** cách. ▪ Chọn 2 chữ số còn lại (c,d) từ 4 chữ số còn lại: $A_4^2 = 12$ cách. ▪ Số các số: $2 \times 3 \times 12 = \mathbf{72}$ số.		
	○ $b \in \{0,4\}$ **(b chẵn)** ▪ Chọn b: **2** cách. ▪ Chọn e chẵn (khác 2, b) còn **2** cách chọn e. ▪ Chọn 2 chữ số còn lại (c,d) từ 4 chữ số còn lại: $A_4^2 = 12$ cách. ▪ Số các số: $2 \times 2 \times 12 = \mathbf{48}$ số. **Vậy** $\lvert T \rvert = 240 + 72 + 48 = 360$ **(phần tử).**		
	Tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 0 \\ 4x - 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$. Suy ra $B(3;0)$.		
	Tam giác ABC vuông tại A, suy ra $AC \perp AB$. Vì $AB \equiv Ox$ nên $AC \parallel Oy$. Điều này dẫn đến đỉnh C có cùng hoành độ với đỉnh A. Gọi $A(a;0)$ thì $C(a;y_C)$. Vì C thuộc đường thẳng $BC: 4x - 3y - 12 = 0$, ta có: $4a - 3y_C - 12 = 0 \Rightarrow y_C = \frac{4a-12}{3} = \frac{4}{3}(a-3)$. Vậy $A(a;0)$ và $C\left(a;\frac{4}{3}(a-3)\right)$.  		
	$AB = \lvert x_B - x_A \rvert = \lvert 3 - a \rvert = \lvert a - 3 \rvert$. $AC = \lvert y_C - y_A \rvert = \left\lvert \frac{4}{3}(a-3) - 0 \right\rvert = \frac{4}{3}\lvert a - 3 \rvert$.		

	$S_{\Delta ABG} = 8 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta ABG} = 24$	
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\lvert a-3\rvert.\frac{4}{3}\lvert a-3\rvert = 24 \Leftrightarrow \lvert a-3\rvert = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 9 \\ a = -3 \end{array}\right.$	
	Với $a = 9 \Rightarrow A(9;\ 0),\ B(3;0), C(9;8)$ Với $a = -3 \Rightarrow A(-3;\ 0),\ B(3;0), C(-3;-8)$	
	Xét tam giác ABM có AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên tam giác ABM cân tại A. Suy ra $AB = AM$, $AM = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow\ c = \frac{b}{2} \Rightarrow \mathbf{b = 2c}$.	
	Sử dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác ABC: $BM^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$. Thay $b = 2c$ vào ta được: $BM^2 = \frac{2a^2+2c^2-4c^2}{4} = \frac{2a^2-2c^2}{4} = \frac{a^2-c^2}{2}$ Trong tam giác vuông AHM: $AH^2 = AM^2 - HM^2$ Vì ΔABM cân tại A nên H là trung điểm BM, do đó $HM = \frac{BM}{2} \Rightarrow HM^2 = \frac{BM^2}{4}$. $AH^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2-c^2}{2}\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2-c^2}{8}$ Thay $b = 2c \Rightarrow b^2 = 4c^2$: $AH^2 = \frac{4c^2}{4} - \frac{a^2-c^2}{8} = \frac{8c^2-a^2+c^2}{8} = \frac{9c^2-a^2}{8}$  	
	Gọi N là trung điểm DC Ta có $AD = 2MN,\ MN = 2HD \Rightarrow AD = 4HD \Rightarrow AD = \frac{4}{3}AH \Rightarrow AD^2 = \frac{16}{9}AH^2$.	
	Theo giả thiết ta có $2BM = \sqrt{3}AD \Leftrightarrow 4BM^2 = 3AD^2 \Leftrightarrow 4\frac{a^2-c^2}{2} = 3.\frac{16}{9}\frac{9c^2-a^2}{8} \Leftrightarrow a^2 = 3c^2$	
	Theo định lý cosin: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4c^2+c^2-3c^2}{2.2c.c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan A = \sqrt{3}.$	



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, mỗi đơn vị trên các trục ứng với $10\,m$.

Khi đó $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ và $B\left(0;\frac{9}{2}\right)$

Ta có parabol có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}$.

Gọi con đường là đường gấp khúc MEN.

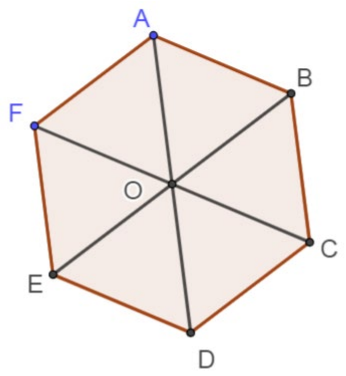
Vì E nằm trên đường cong BIC nên $E\left(x;\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)$ với $0\le x\le 3$.

Tổng độ dài con đường là:

$$EM+EN\ge EH+EK=\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)+x$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)^2+4\ge 4$$

Vì đơn vị mỗi trục ứng với 10 mét nên độ dài con đường ngắn nhất là 40 mét.



Số nằm ở O là số lẻ nên thuộc tập $x=\{1,3,5,7\}$.

Gọi các cặp số đối xứng nhau qua tâm O là; $(a;d),(b;e),(c;f)$

Theo giả thiết: 3 số trên đường chéo qua O có tổng bằng nhau nên;

$a+x_0+d=b+x_0+e=c+x_0+f$

suy ra $a+d=b+e=c+f=k$

Ta có :

Tổng của 7 chữ số là: 1+2+3+4+5+6+7=28 nên $x_0+(a+d)+(b+e)+(c+f)=28$, suy ra

$x_0+3k=28$

Trong đó x_0 thuộc X, là số lẻ và k là số nguyên dương

TH1: $x_0=1$. Suy ra $k=9$, vậy các cặp gồm 2 phần tử từ $\{2,3,4,5,6,7\}$ có tổng bằng 9 là: $(3;6),(2;7),(4;5)$ nên có 1 cách chọn x_0, chọn 3 cặp số để bỏ vào ba cặp đỉnh đối diện có: $1.3!.2^3=48$ (cách)

TH2: $x_0=3$ suy ra $3k=25$ (loại)

TH3: $x_0=5$ suy ra $3k=23$ (loại)

TH4 $x_0=7$ suy ra $k=7$. Vậy các cặp gồm 2 phần tử từ $\{1,2,3,4,5,6\}$ có tổng bằng 7 là: $(1;6),(2;5),(4;3)$ nên có 1 cách chọn x_0, chọn 3 cặp số để bỏ vào ba cặp đỉnh đối diện có: $1.3!.2^3=48$ (cách).

Như vậy có 48+48=96 (cách)

Ta có: +) $f(0)=c,\quad f(1)=a+b+c,\quad f(-1)=a-b+c.$

+) $f(\alpha)=f(\beta)\Rightarrow a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0\Rightarrow(\alpha-\beta)(a(\alpha+\beta)+b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\beta\\ \alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}\end{array}\right.$

+) $f(x)$ là một tam thức bậc hai, nên với mỗi số k cố định, tồn tại nhiều nhất hai số thực phân biệt x để $f(x)=k$.

Từ đây suy ra, do $f(f(1))=f(f(0))=f(f(-1))$ nên tập $\{f(1),f(0),f(-1)\}$ chứa nhiều nhất hai phần tử phân biệt. Kết hợp $f(1)\neq f(0)$ ta có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(1)=f(-1),\quad f(1)\neq f(0)$

Từ $f(1)=f(-1)\Rightarrow(a+b+c)=(a-b+c)\Rightarrow b=0$.

Khi đó $f(x)=ax^2+c$.

Điều kiện bài toán trở thành: $f(f(1))=f(f(0))\Rightarrow f(a+c)=f(c)$.

Vì $f(1)\neq f(0)$ nên $a+c\neq c$ (luôn đúng do $a\neq 0$).

Áp dụng tính chất hàm bậc hai với $b=0$: $(a+c)+c=0\Rightarrow a+2c=0\Rightarrow c=-\dfrac{a}{2}$

Vậy $f(x)=ax^2-\dfrac{a}{2}$. Thử lại thỏa mãn bài toán

Trường hợp 2: $f(0)=f(-1)$ **và** $f(1)\neq f(0)$

Từ $f(0)=f(-1)\Rightarrow c=a-b+c\Rightarrow a=b$. Khi đó $f(x)=ax^2+ax+c$.

Điều kiện còn lại: $f(f(1))=f(f(0))\Rightarrow f(2a+c)=f(c)$.

Vì $f(1)\neq f(0)$ nên $2a+c\neq c$ (đúng do $a\neq 0$).

Theo tính chất đối xứng: $(2a+c)+c=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{a}{a}=-1\Rightarrow 2a+2c=-1\Rightarrow c=\dfrac{-1-2a}{2}$

Vậy $f(x)=ax^2+ax-\dfrac{2a+1}{2}$. Thử lại thỏa mãn

Vậy tất cả các hàm thỏa mãn bài toán là $f(x)=ax^2-\dfrac{a}{2},\quad f(x)=ax^2+ax-\dfrac{2a+1}{2}$

----------------------- **HẾT** -----------------------