

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $2x^3 - x + 1 = 3(x^2 - 1)\sqrt{2x - 1}$.

b) Một nhà máy dự định sản xuất 2 loại sản phẩm I và II. Khảo sát cho thấy mỗi sản phẩm loại I lãi 20 triệu đồng, mỗi sản phẩm loại II lãi 70 triệu đồng. Để sản xuất ra một sản phẩm loại I cần 2 tấn nguyên liệu loại A và 1 tấn nguyên liệu loại B. Để sản xuất ra một sản phẩm loại II cần 1 tấn nguyên liệu loại A, 2 tấn nguyên liệu loại B và 1 tấn nguyên liệu loại C. Nhà máy đó dự trữ được 8 tấn nguyên liệu loại A, 7 tấn nguyên liệu loại B và 3 tấn nguyên liệu loại C. Hỏi nhà máy cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để số tiền lãi thu được là nhiều nhất?

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{mx^2 - 2mx - m - 6}{(m-2)x^2 - 2mx - 1}}$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị m để hàm số

đã cho xác định trên \mathbb{R} .

b) Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó luôn có mặt các chữ số 1 và 2?

Câu 3. (2,0 điểm)

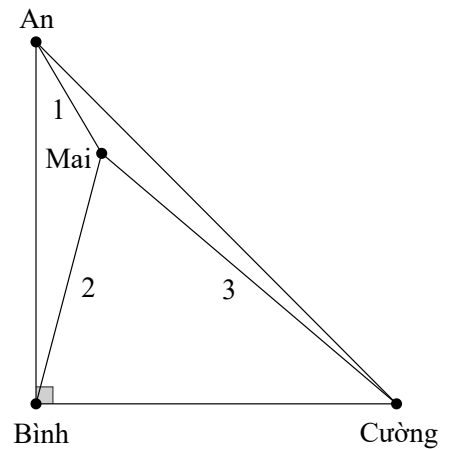
Ông Nam có 25 phòng trọ cho thuê, giá thuê của tất cả các phòng đều như nhau. Nếu cho thuê mỗi phòng với giá 3 triệu đồng một tháng thì mọi phòng đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá thuê phòng thêm 200 nghìn đồng một tháng thì lại có thêm 1 phòng bị bỏ trống không có người thuê. Biết rằng hàng tháng, ngoài tiền thuê phòng thì ông Nam còn thu được thêm 200 nghìn đồng mỗi phòng từ việc cung cấp điện, nước và các nhu cầu sinh hoạt khác cho những người thuê phòng. Hỏi số tiền lớn nhất mỗi tháng mà ông Nam có thể thu được từ việc cho thuê phòng trọ là bao nhiêu?

Câu 4. (6,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC > AB$ và đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$, đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AB và AC lần lượt tại I

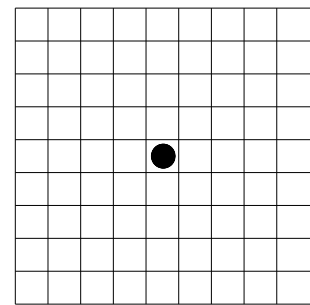
và K . Biết $K(-1;3)$, phương trình $(CI): 3x + y + 5 = 0$ và đường thẳng BC đi qua điểm $M(-11;3)$. Viết phương trình đường thẳng BK và tìm tọa độ điểm A .

b) Bạn Mai giao cho ba bạn An, Bình, Cường 3 đoạn dây không giãn có độ dài lần lượt là $1(m)$, $2(m)$, $3(m)$. Bốn bạn chơi trò chơi như sau: Bạn Mai giữ ba đầu mút của ba đoạn dây đó tại cùng một điểm, ba đầu mút còn lại được các bạn An, Bình, Cường kéo căng tạo thành ba đoạn thẳng sao cho vị trí của ba bạn này là ba đỉnh của một tam giác vuông cân tại vị trí của Bình, đồng thời Mai thuộc miền trong tam giác (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích của tam giác vuông cân đó.



Câu 5. (2,0 điểm)

Xét một quân cờ đặt ở ô trung tâm của bảng ô vuông cỡ 9×9 . Di chuyển ngẫu nhiên quân cờ 4 nước, mỗi nước quân cờ đi sang ô chung 1 đỉnh hoặc chung 1 cạnh với ô trước đó. Có bao nhiêu cách di chuyển để sau 4 nước, quân cờ quay trở lại ô trung tâm?

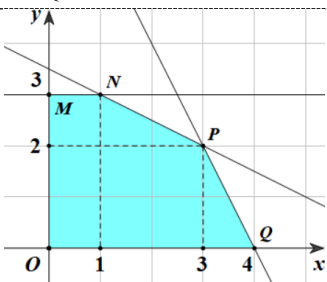


-----**HẾT**-----

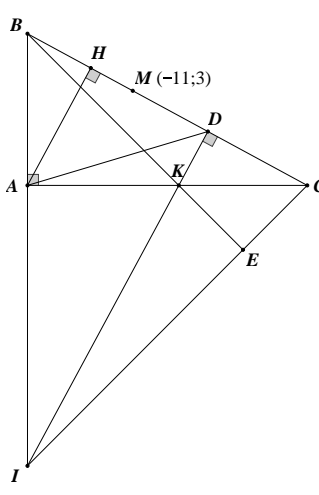
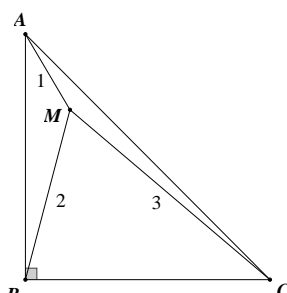
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Lưu ý: Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều cho điểm tương ứng

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a (2,5 điểm)	Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{2}$.	0,25
	Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)(2x^2 - 2x + 1) = 3(x+1)(x-1)\sqrt{2x-1}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 (L) \\ 2x^2 - 2x + 1 = 3(x-1)\sqrt{2x-1} \end{cases} \quad (1)$	0,25
	Có (1) $\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 2x - 1 = 3(x-1)\sqrt{2x-1}$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2x-1})(2x-2-\sqrt{2x-1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x-1 \\ \sqrt{2x-1} = 2x-2 \end{cases}$	0,25
	+) $\sqrt{2x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$.	0,5
	+) $\sqrt{2x-1} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 = (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$.	0,75
Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x = 2 + \sqrt{2}$ và $x = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$.		
Câu 1b (2,5 điểm)	Gọi số sản phẩm loại I và loại II mà nhà máy sản xuất là x, y ($x, y \geq 0$).	0,25
	Tiền lãi thu về là $T(x; y) = 20x + 70y$.	0,25
	Nhà máy dự trữ được 8 tấn nguyên liệu loại A nên ta có: $2x + y \leq 8$.	0,25
	Nhà máy dự trữ được 7 tấn nguyên liệu loại B nên ta có: $x + 2y \leq 7$.	0,25
	Nhà máy dự trữ được 3 tấn nguyên liệu loại C nên ta có: $y \leq 3$.	0,25
	Cần tìm $x, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$ sao cho biểu thức $T(x; y)$ lớn nhất.	0,25
		0,25
	Miền nghiệm của hệ bất phương trình là đa giác $OMNPQ$ như hình vẽ trên với $O(0;0), M(0;3), N(1;3), P(3;2), Q(4;0)$.	0,25
	Ta có $T(0;0) = 0; T(0;3) = 210; T(1;3) = 230; T(3;2) = 200; T(4;0) = 80$.	0,25
	Vậy để thu được tiền lãi cao nhất cần sản xuất 1 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II.	0,25

Câu 2a (2,5 điểm)	Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{mx^2 - 2mx - m - 6}{(m-2)x^2 - 2mx - 1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ (1)	0,25
	Đặt $f(x) = mx^2 - 2mx - m - 6$ và $g(x) = (m-2)x^2 - 2mx - 1.$	
	Điều kiện phải có $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ (2)	
	TH1: $m = 2.$ Khi đó $g(x) = -4x - 1:$ không thỏa mãn.	
	TH2: $m \neq 2.$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow \Delta'_g < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1.$ (*)	
	Lúc này $m - 2 < 0$ và $\Delta'_g < 0$ nên $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$	
	Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$	
	Với $m = 0$ thì $f(x) = -6 < 0, \forall x \in \mathbb{R}:$ thỏa mãn.	
	Xét $m \neq 0.$ Khi đó $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta'_f \leq 0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m(m+6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0.$	
Tóm lại ta có $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0.$	0,25	
Kết hợp (*) suy ra các giá trị m thỏa mãn bài toán là $-2 < m \leq 0.$	0,25	
Câu 2b (2,5 điểm)	Gọi số thỏa mãn là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}.$ Trường hợp 1: $a_6 = 1.$ <i>Khả năng 1:</i> Số có chữ số 0. Chọn vị trí cho số 0: có 4 cách (khác vị trí a_1, a_6). Chọn vị trí cho số 2: có 4 cách (khác vị trí số 0 và a_6). Chọn 3 chữ số xếp vào 3 vị trí còn lại: có A_7^3 cách (khác 0, 1, 2). \Rightarrow có $4.4.A_7^3 = 3360$ số.	0,5
	<i>Khả năng 2:</i> Số không có chữ số 0. Chọn vị trí cho số 2: có 5 cách (khác vị trí a_6). Chọn 4 chữ số xếp vào 4 vị trí còn lại: có A_7^4 cách (khác 0, 1, 2). \Rightarrow có $5.A_7^4 = 4200$ số. Do đó trường hợp này có $3360 + 4200 = 7560$ số.	0,5
	Trường hợp 2: $a_6 \neq 1.$ <i>Khả năng 1:</i> Số có chữ số 0. Chọn a_6 : có 4 cách (lẻ, khác 1). Chọn vị trí cho số 0: có 4 cách (khác vị trí a_1, a_6). Chọn vị trí cho các số 1, 2: có A_4^2 cách (khác vị trí số 0 và a_6). Chọn 2 chữ số xếp vào 2 vị trí còn lại: có A_6^2 cách (khác 0, 1, 2, a_6). \Rightarrow có $4.4.A_4^2.A_6^2 = 5760$ số.	0,5
	<i>Khả năng 2:</i> Số không có chữ số 0. Chọn a_6 : có 4 cách (lẻ, khác 1). Chọn vị trí cho các số 1, 2: có A_5^2 cách (khác vị trí a_6). Chọn 3 chữ số xếp vào 3 vị trí còn lại: có A_6^3 cách (khác 0, 1, 2, a_6). \Rightarrow có $4.A_5^2.A_6^3 = 9600$ số. Do đó trường hợp này có $5760 + 9600 = 15360$ số.	0,5
	Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $7560 + 15360 = 22920$ số.	0,5

Câu 3 (2,0 điểm)	Gọi x là số phòng bị bỏ trống ($x \in \mathbb{N}, x \leq 25$) thì số phòng được thuê là $25 - x$.		0,5										
	Chọn đơn vị tiền là trăm nghìn đồng . Khi đó giá thuê mỗi phòng là $30 + 2x$		0,25										
	\Rightarrow thu nhập từ mỗi phòng được thuê là $30 + 2x + 2 = 32 + 2x$.		0,25										
	Do đó thu nhập mỗi tháng của ông An là $(25 - x)(32 + 2x) = -2x^2 + 18x + 800$.		0,25										
	Xét $f(x) = -2x^2 + 18x + 800$ trên $[0; 25]$, ta có bảng biến thiên:		0,25										
<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">x</th> <th style="padding: 5px;">0</th> <th style="padding: 5px;">4</th> <th style="padding: 5px;">4,5</th> <th style="padding: 5px;">5</th> <th style="padding: 5px;">25</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 5px;">800</td> <td style="padding: 5px;">840</td> <td style="padding: 5px;">840,5</td> <td style="padding: 5px;">840</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </tbody> </table>		x		0	4	4,5	5	25	$f(x)$	800	840	840,5	840
x	0	4	4,5	5	25								
$f(x)$	800	840	840,5	840	0								
Chú ý rằng $x \in \mathbb{N}$ nên từ bảng biến thiên suy ra số tiền thu được lớn nhất từ việc cho thuê phòng trọ mỗi tháng mà ông Nam có thể đạt được là 84 triệu đồng.		0,5											
Câu 4a (3,0 điểm)		Vì $CA \perp BI$ và $ID \perp BC$ nên K là trực tâm tam giác BIC , dẫn tới $BK \perp CI$.	0,5										
		Từ đó phương trình $BK : x - 3y + 10 = 0$.	0,5										
		Gọi $E = BK \cap IC$ thì $KE \perp EC$.	0,5										
		Tứ giác $ABDK$ nội tiếp nên $AKB = ADB = 45^\circ$ (do ΔHAD vuông cân tại H) $\Rightarrow EKC = 45^\circ$. Do đó tam giác EKC vuông cân tại E .											
		Suy ra $CK = \sqrt{2}KE = \sqrt{2}.d(K, CI) = \sqrt{5}$.	0,25										
	Có $C \in CI \Leftrightarrow C(c; -3c - 5)$. Khi đó	0,25											
	$CK = \sqrt{5} \Leftrightarrow (c+1)^2 + (-3c-8)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = -3 \end{cases}$.												
	+) Với $c = -2$ thì $C(-2; 1)$. Khi đó BC đi qua C, M nên phương trình $BC : 2x + 9y - 5 = 0$. Vì $B = BC \cap BK$ nên $B\left(-5; \frac{5}{3}\right)$: loại vì khi đó B, K khác phía so với CI .		0,25										
+) Với $c = -3$ thì $C(-3; 4)$. Khi đó BC đi qua C, M nên phương trình $BC : x - 8y + 35 = 0$. Vì $B = BC \cap BK$ nên $B(5; 5)$.		0,25											
Ta cũng viết được phương trình $CK : x + 2y - 5 = 0$. Có AB đi qua B và vuông góc với CK nên phương trình $AB : 2x - y - 5 = 0$.		0,25											
Vì $A = AB \cap CK$ nên $A(3; 1)$. Thử lại thỏa mãn.		0,25											
Câu 4b (3,0 điểm)		Đặt $BA = BC = x$ ($x > 0$). Khi đó ta có	0,25										
		$\cos ABM = \frac{2^2 + x^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot x} = \frac{3 + x^2}{4x}$;	0,5										
		$\cos CBM = \frac{2^2 + x^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot x} = \frac{x^2 - 5}{4x}$ ($x > \sqrt{5}$ do CBM nhọn).	0,5										

	<p>Vì $ABM + CBM = 90^\circ$ nên $\cos ABM = \sin CBM$ $\Rightarrow \cos^2 ABM + \cos^2 CBM = \sin^2 CBM + \cos^2 CBM = 1$</p>	0,5																																																																																																					
	<p>$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2+3}{4x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-5}{4x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^4 - 20x^2 + 34 = 0$ $\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \pm 2\sqrt{2}$.</p>	0,5																																																																																																					
	Với điều kiện $x > \sqrt{5}$ nên $x^2 = 5 + 2\sqrt{2}$ thỏa mãn.	0,5																																																																																																					
	Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}BA^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{2}$.	0,25																																																																																																					
<p>Câu 5 (2,0 điểm)</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>13</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td style="background-color: yellow;">0</td><td>3</td><td>14</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td>4</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>																								9	10	11	12							5	1	6	13							2	0	3	14							7	4	8																																													<p>Đánh số một số ô của bảng như hình vẽ, trong đó ô xuất phát là ô số 0. TH1: Bước 1 quân cờ đi thẳng: có 4 cách chọn ô là các ô số 1, 2, 3, 4. Vì các ô này có vai trò bình đẳng nên không mất tổng quát giả sử quân cờ đi lên ô số 1. Khi đó xét bước thứ 2, có 5 khả năng: +) Nếu quân cờ đi lên ô 10 thì bước 3 chỉ có thể đi về các ô 5, 1, 6 để bước 4 về 0 → khả năng này có 3 cách. +) Nếu quân cờ đi lên một trong các ô 9, 11. Chẳng hạn nếu đi lên ô 9 thì bước 3 chỉ có thể đi về các ô 5, 1 để bước 4 về 0 → khả năng này có $2 \cdot 2 = 4$ cách.</p>	0,25
				9	10	11	12																																																																																																
				5	1	6	13																																																																																																
				2	0	3	14																																																																																																
			7	4	8																																																																																																		
	<p>+) Nếu quân cờ đi sang một trong các ô 5, 6. Chẳng hạn nếu đi sang ô 5 thì bước 3 chỉ có thể đi về các ô 1, 2 để bước 4 về 0 → khả năng này có $2 \cdot 2 = 4$ cách. +) Nếu quân cờ đi về một trong các ô 2, 3. Chẳng hạn nếu đi về ô 2 thì bước 3 chỉ có thể đi sang các ô 5, 1, 7, 4 để bước 4 về 0 → khả năng này có $2 \cdot 4 = 8$ cách. +) Nếu quân cờ đi về ô 0 thì bước 3 có thể đi sang các ô 5, 1, 6, 2, 3, 7, 4, 8 để bước 4 lại về 0 → khả năng này có 8 cách. Tóm lại TH1 có $4(3+4+4+8+8) = 108$ cách.</p>	0,25																																																																																																					
	<p>TH2: Bước 1 quân cờ đi đi chéo: có 4 cách chọn ô là các ô số 5, 6, 7, 8. Vì các ô này có vai trò bình đẳng nên không mất tổng quát giả sử quân cờ đi lên ô số số 6. Khi đó xét bước thứ 2, có 5 khả năng: +) Nếu quân cờ đi lên ô 12 thì bước 3 chỉ có thể đi về ô 6 để bước 4 về 0 → khả năng này có 1 cách. +) Nếu quân cờ đi sang một trong các ô 11, 13. Chẳng hạn nếu đi lên ô 11 thì bước 3 chỉ có thể đi về các ô 1, 6 để bước 4 về 0 → khả năng này có $2 \cdot 2 = 4$ cách. +) Nếu quân cờ đi sang một trong các ô 10, 14. Chẳng hạn nếu đi sang ô 10 thì bước 3 chỉ có thể nhảy về các ô 5, 1, 6 để bước 4 về 0 → khả năng này có $2 \cdot 3 = 6$ cách. +) Nếu quân cờ đi sang một trong các ô 1, 3. Chẳng hạn nếu đi sang ô 1 thì bước 3 chỉ có thể đi về các ô 5, 6, 2, 3 để bước 4 về 0 → khả năng này có $2 \cdot 4 = 8$ cách. +) Nếu quân cờ đi về ô 0 thì bước 3 có thể đi sang các ô 5, 1, 6, 2, 3, 7, 4, 8 để bước 4 lại về 0 → khả năng này có 8 cách. Tóm lại TH2 có $4(1+4+6+8+8) = 108$ cách.</p>	0,5																																																																																																					
	Vậy số cách di chuyển thỏa mãn bài toán là $108 + 108 = 216$ cách.	0,25																																																																																																					

----- HẾT -----