

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức : $A = 2x^2 - 3x + 5$ với $|x| = \frac{1}{2}$

b) Tìm x, biết: $|x^2 + |x+1|| = x^2 + 5$

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\frac{3a+b+c}{a} = \frac{a+3b+c}{b} = \frac{a+b+3c}{c}$

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$

b) Cho biết $(x-1).f(x) = (x+4).f(x+8)$ với mọi x. Chứng minh rằng f(x) có ít nhất bốn nghiệm.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x - 3y + 2xy = 4$

b) Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2018$ là số chính phương.

Câu 4: (3,0 điểm)

1) Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

a) Chứng minh rằng: $MC = BN$ và $BN \perp CM$;

b) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $MA:MB:MC = 1:2:3$. Tính số đo $\widehat{AMB}$?

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho 2016 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}$ thỏa mãn :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2016}} = 300$$

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 số trong 2016 số đã cho bằng nhau

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

Giám thị 1:.....Giám thị 2:.....

Câu	Đáp án	Điểm
1 (2,0đ)	a. (1,0đ). Vì $ x = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$	0,25
	* Với $x = \frac{1}{2}$ thì $A = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\frac{1}{2} + 5 = 4$	0,25
	* Với $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 7$	0,25
	Vậy $A = 4$ với $x = \frac{1}{2}$ và $A = 7$ với $x = -\frac{1}{2}$.	0,25
	b. (1,0đ). vì $x^2 + x+1 > 0$ nên ta có: $ x^2 + x+1 = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + x+1 = x^2 + 5$	0,25
	$\Rightarrow x+1 = 5 \Rightarrow x+1 = 5$ hoặc $x+1 = -5$	0,25
	* Trường hợp 1: $x+1 = 5 \Rightarrow x = 4$ * Trường hợp 2: $x+1 = -5 \Rightarrow x = -6$ Vậy $x = -6$ hoặc $x = 4$	0,25
2 (2,0đ)	a. (1,0đ). Theo bài ra: $\frac{3a+b+c}{a} = \frac{a+3b+c}{b} = \frac{a+b+3c}{c}$ (1) với a, b, c khác 0 ta có $\Rightarrow \frac{3a+b+c}{a} - 2 = \frac{a+3b+c}{b} - 2 = \frac{a+b+3c}{c} - 2$	0,25
	$\Rightarrow \frac{3a+b+c-2a}{a} = \frac{a+3b+c-2b}{b} = \frac{a+b+3c-2c}{c}$ $\Rightarrow \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$ (2)	0,25
	+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì từ (2) ta có $a = b = c$ Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 2+2+2 = 6$	0,25
	+ Nếu $a+b+c = 0$ thì $a+b = -c$; $b+c = -a$; $c+a = -b$ Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} = -1-1-1 = -3$	0,25
	b. (1,0đ). Vì đa thức $(x-1).f(x) = (x+4).f(x+8)$ đúng với mọi x nên *) Với $x = 1$ thì ta có: $(1-1).f(1) = (1+4).f(9)$ $\Rightarrow 0.f(1) = 5.f(9) \Rightarrow f(9) = 0$ Suy ra $x = 9$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$	0,25

	*) Với $x = -4$ thì ta có : $-5. f(-4) = 0. f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$ Suy ra $x = -4$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$	0,25																				
	*) Với $x = 9$ thì ta có: $8. f(9) = 13. f(17) \Rightarrow f(17) = 0$ (vì $f(9) = 0$) Suy ra $x = 17$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$	0,25																				
	*) Với $x = 17$ thì ta có: $16. f(17) = 21. f(25) \Rightarrow f(25) = 0$ (vì $f(17) = 0$) Suy ra $x = 25$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$ Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất 4 nghiệm là $9 ; -4 ; 17 ; 25$	0,25																				
3 (2,0đ)	a. (1,0đ). Ta có: $x - 3y + 2xy = 4$ $\Rightarrow 2x + 4xy - 6y = 8$ $\Rightarrow 2x + 2x.2y - 3.2y - 3 = 8 - 3$ $\Rightarrow 2x(1 + 2y) - 3.(2y + 1) = 5$ $\Rightarrow (2x - 3)(1 + 2y) = 5$ Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2x - 3 ; 1 + 2y \in \mathbb{Z}$ nên $2x - 3 ; 1 + 2y \in U(5)$	0,5																				
	Ta có bảng sau <table><tr><td>$2x - 3$</td><td>- 1</td><td>-5</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>$1 + 2y$</td><td>- 5</td><td>-1</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>-1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>-3</td><td>-1</td><td>2</td><td>0</td></tr></table>	$2x - 3$	- 1	-5	1	5	$1 + 2y$	- 5	-1	5	1	x	1	-1	2	4	y	-3	-1	2	0	0,25
	$2x - 3$	- 1	-5	1	5																	
	$1 + 2y$	- 5	-1	5	1																	
	x	1	-1	2	4																	
	y	-3	-1	2	0																	
Vì x, y nguyên nên các cặp số nguyên thỏa mãn là: $(x; y) \in \{ (1; -3) ; (-1; -1); (2; 2); (4; 0) \}$	0,25																					
b. (1,0đ). Giả sử $n^2 + 2018$ là số chính phương với n là số tự nhiên Khi đó ta có $n^2 + 2018 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$)	0,25																					
Từ đó suy ra : $m^2 - n^2 = 2018 \Leftrightarrow m^2 - mn + mn - n^2 = 2018$ $\Leftrightarrow m(m - n) + n(m - n) = 2018 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2018$ Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)	0,25																					
Mặt khác ta có: $m + n + m - n = 2m$ $\Rightarrow 2$ số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)	0,25																					
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn. $\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$ nhưng 2018 không chia hết cho 4 $\Rightarrow$ Điều giả sử sai. Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2018$ là số chính phương.	0,25																				

	Theo bài ra: $MA: MB: MC = 1: 2: 3 \Rightarrow \frac{MA}{1} = \frac{MB}{2} = \frac{MC}{3}$ Đặt $\frac{MA}{1} = \frac{MB}{2} = \frac{MC}{3} = a \ (a > 0)$ $\Rightarrow MA = a; MB = 2a; MC = 3a.$ Vẽ tam giác MBK vuông cân tại B (K và A nằm cùng phía đối với BM). $\Rightarrow BK = BM = 2a$	0,25
	Xét $\triangle ABK$ và $\triangle CBM$ có: $AB = BC \ (\triangle ABC \text{ vuông cân tại } B)$ $\widehat{MBC} = \widehat{ABK} \ (\text{cùng phụ với góc } ABM)$ $BM = BK$ Do đó $\triangle ABK = \triangle CBM \ (c.g.c)$ suy ra $CM = KA = 3a.$	0,25
	Xét tam giác vuông MBK vuông tại B ta có $MK^2 = MB^2 + BK^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$ Xét tam giác AMK có $AM^2 + MK^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2 = (3a)^2 = AK^2$ Theo định lí Py – ta – go đảo $\Rightarrow$ tam giác KMA vuông tại M. $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMK} + \widehat{KMB} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$ Vậy $\widehat{AMB} = 135^\circ$	0,25
		0,25
5 (1,0đ)	Giả sử trong 2016 số đã cho không có 2 số nào bằng nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2016}.$ Vì $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}$ đều là các số nguyên dương nên: $a_1 \geq 1; a_2 \geq 2; a_3 \geq 3; \dots, a_{2016} \geq 2016$	0,25
	Suy ra: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2016}} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2016}$ $= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1024} + \frac{1}{1025} + \frac{1}{1026} + \dots + \frac{1}{2016}\right)$	0,25
	$< 1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{4}.4 + \frac{1}{8}.8 + \dots + \frac{1}{512}.512 + \frac{1}{1024}.993$ $< 1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2^2}.2^2 + \frac{1}{2^3}.2^3 + \dots + \frac{1}{2^{10}}.2^{10} = 11 < 300$	0,25
	Mâu thuẫn với giả thiết. Do đó điều giả sử là sai. Vậy trong 2016 số đã cho phải có ít nhất 2 số bằng nhau.	0,25

Ghi chú: Nếu học sinh giải bằng cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

----- Hết -----