

I. PHẦN CHUNG

Câu 1 (4,5 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-3} + \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-5} + \frac{1}{-5} \cdot \frac{1}{6}$

b) $B = 3\sqrt{(-5)^2} - 0,5.0.(3).\sqrt{9} + \left| -\frac{2^2}{3} \right| : \left(-1\frac{1}{3} \right)$

c) $C = \frac{(-2)^5 \cdot 6^4 + 9^2 \cdot 8^4}{(-12)^4}$

Câu 2 (3,0 điểm) Tìm x biết:

a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$

b) $\frac{1-x}{-9} = \frac{-25}{1-x}$.

Câu 3 (2,0 điểm) Cho các số có hai chữ số $\overline{ab}; \overline{bc}$ thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Câu 4 (6,5 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm I. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

a) Chứng minh rằng $BI = ID$.

b) Tia DI cắt tia AB tại điểm E. Chứng minh rằng $\triangle IBE = \triangle IDC$. Từ đó suy ra $BD \parallel CE$.

c) Gọi H là trung điểm của EC. Chứng minh $AH \perp BD$.

d) Cho $\angle ABC = 2\angle ACB$. Chứng minh $AB + BI = AC$.

II. PHẦN RIÊNG

Thí sinh lựa chọn làm một (chỉ một) câu trong hai câu sau:

Câu 5a (4,0 điểm)

1) Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Câu 5b (4,0 điểm)

1) Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^9} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và b (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $b > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$.

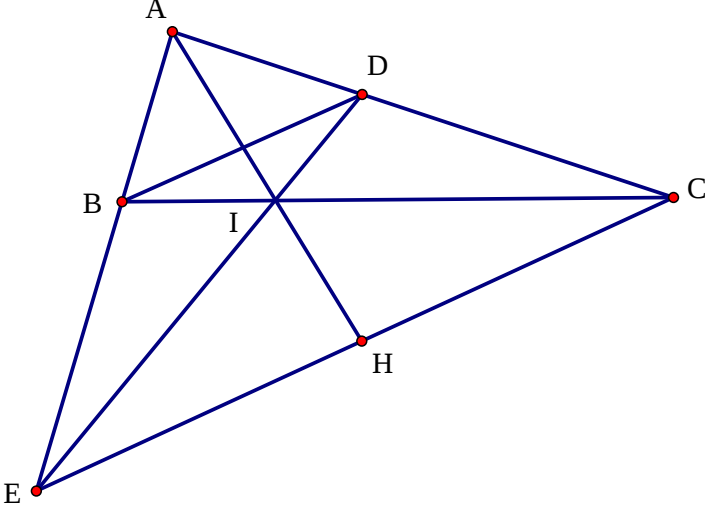
ii) $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{b}\right)$.

-----**HẾT**-----

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

Câu	Đáp án	Điểm
1.a (1,5 điểm)		
	$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-3} + \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-5} + \frac{1}{-5} \cdot \frac{1}{6}$ $= \frac{-1}{2 \cdot 3} + \frac{-1}{3 \cdot 4} + \frac{-1}{4 \cdot 5} + \frac{-1}{5 \cdot 6}$ $= -\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}\right)$ $= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$ $= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$ $= -\frac{1}{3}$	0,5 0,5 0,5
1.b (1,5 điểm)		
	$B = 3\sqrt{(-5)^2} - 0,5 \cdot 0, (3) \cdot \sqrt{9} + \left -\frac{2^2}{3} \right : \left(-1\frac{1}{3} \right)$ $= 3 \cdot \sqrt{25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \left -\frac{4}{3} \right : \left(\frac{-4}{3} \right)$ $= 3 \cdot 5 - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{-3}{4}$ $= 15 - \frac{1}{2} - 1$ $= \frac{27}{2}$	0,75 0,5 0,25
1.c (1,5 điểm)		
	$C = \frac{(-2)^5 \cdot 6^4 + 9^2 \cdot 8^4}{(-12)^4}$ $= \frac{-2^5 \cdot (2 \cdot 3)^4 + 3^4 \cdot 2^{12}}{12^4}$ $= \frac{-2^5 \cdot 2^4 \cdot 3^4 + 2^{12} \cdot 3^4}{(2^2 \cdot 3)^4}$ $= \frac{-2^9 \cdot 3^4 + 2^{12} \cdot 3^4}{2^8 \cdot 3^4}$ $= \frac{2^9 \cdot 3^4 (-1 + 2^3)}{2^8 \cdot 3^4}$ $= 14$	0,5 0,5 0,5
2.a (1,5 điểm)		

	$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : 2x-1 = -\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3} : 2x-1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$ $\frac{1}{3} : 2x-1 = 1$ $ 2x-1 = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = \frac{1}{3} \\ 2x-1 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$	0,25 0,25 0,25 0,5
	Vậy $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.	0,25
2.b (1,5 điểm)		
	$\frac{1-x}{-9} = \frac{-25}{1-x}$ $\Rightarrow (1-x)(1-x) = (-9) \cdot (-25)$ $\Rightarrow (1-x)^2 = 225$ $\Rightarrow \begin{cases} 1-x = 15 \\ 1-x = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ x = 16 \end{cases}$	0,5 0,25 0,5
	Vậy $x \in \{-14; 16\}$.	0,25
3. (2,0 điểm)		
	Cho các số có hai chữ số $\overline{ab}; \overline{bc}$ thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$.	
	Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.	
	+ Với các số có hai chữ số $\overline{ab}; \overline{bc}$ thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$. Ta có:	
	$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{10a+b}{10b+c} \Rightarrow \frac{10a+b}{10b+c} = \frac{b}{c}$	0,25
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau được: $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{b}{c} = \frac{10a+b-b}{10b+c-c} = \frac{10a}{10b} = \frac{a}{b}$	0,5
	Từ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau được: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$	0,5
	Vậy $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.	0,25
4.1 (2,0 điểm)		

	Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm I. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. e) Chứng minh rằng $BI = ID$. f) Tia DI cắt tia AB tại điểm E. Chứng minh rằng $\triangle IBE = \triangle IDC$. Từ đó suy ra $BD \parallel CE$. g) Gọi H là trung điểm của EC. Chứng minh $AH \perp BD$. h) Cho $\angle ABC = 2\angle ACB$. Chứng minh $AB + BI = AC$.  Vẽ hình đúng, ghi GT- KL đủ + Chứng minh $\triangle ABI = \triangle ADI$ (c.g.c) $\Rightarrow BI = ID$ (hai cạnh tương ứng)	0,5
4.2 (1,5 điểm)		
	+ $\triangle ABI = \triangle ADI$ (cmt) $\Rightarrow AB = AD$ Mà $\angle ABI + \angle IBE = 180^\circ$; $\angle ADI + \angle IDC = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle IBE = \angle IDC$ Chứng minh $\triangle IBE = \triangle IDC$ (g.c.g) + $IB = ID$ (cmt) $\Rightarrow \triangle IBD$ cân tại $I \Rightarrow \angle IBD = \frac{180^\circ - \angle BID}{2}$ $\triangle IBE = \triangle IDC$ (cmt) $\Rightarrow IE = IC \Rightarrow \triangle ICE$ cân tại $I \Rightarrow \angle ICE = \frac{180^\circ - \angle CIE}{2}$ Mà $\angle BID = \angle CIE$ (đối đỉnh) nên $\angle IBD = \angle ICE$ mà hai góc này so le trong nên $BD \parallel CE$.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
4.3 (1,5 điểm)		
	+ $\triangle IBE = \triangle IDC$ (cmt) $\Rightarrow BE = DC$. Mà $AB = AD \Rightarrow AB + BE = AD + DC \Rightarrow AE = AC$. Chứng minh $\triangle AEH = \triangle ACH$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle AHE = \angle AHC$. Mà $\angle AHE + \angle AHC = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle AHE = 90^\circ \Rightarrow AH \perp EC$ Lại có $EC \parallel BD$ (cmt) $\Rightarrow AH \perp BD$.	0,25 0,5 0,5 0,25
4.4 (1,5 điểm)		

	+ Có $ABC = 2.ACB$ hay $ABI = 2.DCI$, mà $ABI = ADI$ (cmt) $\Rightarrow ADI = 2.DCI$ (1)	0,5
	+ Lại có ADI là góc ngoài tại D của $\triangle DIC \Rightarrow ADI = DCI + DIC$ (2)	0,5
	+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow DCI = DIC \Rightarrow \triangle DIC$ cân tại D $\Rightarrow DI = DC$ Mà $DI = BI$, $AB = AD$ nên $AB + BI = AD + DC = AC$ (đpcm)	0,5
5.1 bảng A (2,0 điểm)		
	a) Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.	
	$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$ Ta có:	
	$7^2.A = 7^2.\left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}\right)$	0,5
	$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$	0,5
	$\Rightarrow 49A + A = \left(1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}\right) + \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}\right)$	0,5
	$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$	
	$\Rightarrow A < \frac{1}{50}$. Suy ra đpcm.	0,5
5.2 bảng A (2,0 điểm)		
	Tìm tất cả các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = n - 2020 + n - 2022 $.	
	Với m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $2^m + 2021 = n - 2020 + n - 2022 $. Ta xét ba trường hợp sau:	
	• Trường hợp 1: $n \geq 2022$, ta có: $2^m + 2021 = 2n - 4042$ $2^m - 2n = -6063$ Vế phải là số lẻ, mà $2n$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ là số lẻ $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow n = 3032$ (tm)	0,25
	• Trường hợp 2: $2020 \leq n < 2022$, ta có: $2^m + 2021 = n - 2020 + 2022 - n$ $2^m = -2019$ (vô lí)	0,5
	• Trường hợp 3: $n < 2020$, ta có: $2^m + 2021 = 4042 - 2n$ $2^m + 2n = 2021$ Vế phải là số lẻ, mà $2n$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ là số lẻ $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow n = 1010$ (tm)	0,5
	Vậy $m = 0$, $n = 3032$ hoặc $m = 0$, $n = 1010$ thỏa mãn bài ra.	0,25
5.1 bảng B (2,0 điểm)		

	Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.	
	$A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$ $\Rightarrow 7A = 7 \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$ $= 1 + \frac{2}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$ $\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$ $\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{98}} + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$	0,75
	Đặt $B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{98}} + \frac{1}{7^{99}}$ $\Rightarrow 7B = 7 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{98}} + \frac{1}{7^{99}} \right)$ $= 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$ $\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{98}} \right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{98}} + \frac{1}{7^{99}} \right)$ $\Rightarrow 6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7$ $\Rightarrow B < \frac{7}{6}$ Lại có: $6A = B - \frac{100}{7^{100}} < B \Rightarrow 6A < \frac{7}{6} \Rightarrow A < \frac{7}{36}.$	0,75
		0,5
5.2 bảng B (2,0 điểm)		
	Tìm tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và b (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: iii) $b > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$. iv) $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{b}\right)$.	
	Vì $a_1, a_2, \dots, a_n$ và b là các số nguyên dương (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn $b > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1 \Rightarrow b \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \frac{4}{3} (*)$	0,75
	Lại có: $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ $\Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \dots < \frac{1}{a_n} < 1$	0,25

	$\Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1 \\ 0 < 1 - \frac{1}{a_2} < 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < 1 (**) \\ \dots \\ 0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1 \end{cases}$	0,75
	Từ (*) và (**) suy ra điều mâu thuẫn với $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right)$. Vậy ko tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn bài ra.	0,25

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----**Hết**-----