

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 06/03/2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (6.0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ với $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

b) Chứng minh rằng với n là số chẵn thì $A = n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

c) Tìm số tự nhiên có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

Bài 2. (3.0 điểm)

a) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x-1} + 5x = 13$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 4\sqrt{xy} = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

Bài 3. (3.0 điểm)

a) Cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x + 2m - 1$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) có giá trị bằng 2.

b) Cho $x > 0; y > 0$ và $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Bài 4. (5.0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D bất kì trên cạnh AB . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CA . Gọi P và Q là các giao điểm của MN với đường tròn (O) (điểm P thuộc cung nhỏ BC và điểm Q thuộc cung nhỏ CA). Gọi I là giao điểm khác B của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP . Gọi K là giao điểm của DI với AC .

a) Chứng minh tứ giác $CIPK$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $PK \cdot QC = QB \cdot PD$.

c) Gọi G là giao điểm khác P của AP với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP . Đường thẳng IG cắt BA tại E . Chứng minh khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\frac{AD}{AE}$ không đổi.

Bài 5. (2.0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD . Chứng minh $AD \leq \frac{1}{2}(BM + CN)$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Họ, tên chữ ký GT 1:

Số báo danh: Họ, tên chữ ký GT 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 9

I. Hướng dẫn chung:

- 1) Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với các ý cơ bản học sinh phải trình bày, nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì vẫn cho điểm tối đa.
2) Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm:

Bài 1. (6.0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ với $x > 0; y > 0; xy \neq 1$.

b) Chứng minh rằng với n là số chẵn thì $A = n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

c) Tìm số tự nhiên có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
a) (2.0đ)	$P = \left(\frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} + \frac{\sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$	0.5
	$P = \left(\frac{2\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{1 + x + y + xy}{1 - xy} \right)$	0.5
	$P = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$	0.5x2
b) (2.0đ)	Ta thấy $48 = 3.16$ và $(3;16) = 1$ nên để chứng minh A chia hết cho 48 ta chứng minh A chia hết cho 3 và A chia hết cho 16.	0.5
	Ta có $n^3 + 20n = n^3 - n + 21n = (n - 1)n(n + 1) + 21n$ nên $n^3 + 20n$ chia hết cho 3. Do đó suy ra A chia hết cho 3.	0.5
	Mặt khác do n là số chẵn, khi đó ta đặt $n = 2k$ với k là một số tự nhiên. Từ đó ta có $n^3 + 20n = (2k)^3 + 20.2k = 8k^3 + 40k = 8(k^3 - k) + 48k = 8(k - 1)k(k + 1) + 48k$	0.5
	Suy ra $n^3 + 20n$ chia hết cho 16. Từ đó dẫn đến A chia hết cho 16.	
	Vậy A chia hết cho 48 với mọi n là số tự nhiên chẵn.	0.5
c) (2.0đ)	Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}; 0 < a, b \leq 9$	0,5
	Theo đề bài, ta có: $\overline{ab}(a + b) = a^3 + b^3$	
	$\Leftrightarrow (10a + b)(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow 10a + b = a^2 - ab + b^2$	0,5
	$\Leftrightarrow 10a + b = (a + b)^2 - 3ab \Leftrightarrow 3a(3 + b) = (a + b)(a + b - 1)$	
	mà $a + b$ và $a + b - 1$ nguyên tố cùng nhau. Do đó $\begin{cases} a + b = 3a \\ a + b - 1 = 3 + b \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} a + b = 3 + b \\ a + b - 1 = 3a \end{cases}$	0,5
	Giải tìm được $\overline{ab} = 48$ và $\overline{ab} = 37$	0,5

Bài 2. (3.0 điểm)

a) Giải phương trình $(x + 1)\sqrt{x - 1} + 5x = 13$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 4\sqrt{xy} = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
a) (2.0đ)	ĐK: $x \geq 1$	0,5
	$(x+1)\sqrt{x-1} + 5x = 13 \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x-1}-1) + (6x-12) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + 6(x-2) = 0$	0,5
	$(x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}+1} + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x-1}+1} + 6 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$	0,5
b) (2.0đ)	ĐK: $x \geq 0; y \geq 0$	0,5
	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 4\sqrt{xy} = 16 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 4\sqrt{xy} = 16 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} = 10 \end{cases}$	0,5
	Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = S \geq 0; \sqrt{xy} = P \geq 0$ Suy ra: $\begin{cases} S + 4P = 16 \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 4P = 16 \\ 2S^2 + S = 36 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$ (Thỏa ĐK) Hoặc $\begin{cases} S = -4,5 \\ P = 5,125 \end{cases}$ (Không thỏa ĐK)	0,5
	Với $\begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}, \sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5

Bài 3. (3.0 điểm)

a) Cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x + 2m - 1$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) có giá trị bằng 2.

b) Cho $x > 0; y > 0$ và $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$.

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
a) (1.5đ)	* Với $m = 2$ ta có $y = 3$. Khi đó khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) có giá trị bằng 3 (không thỏa mãn). * Với $m \neq 2$, gọi A và B thứ tự là giao điểm của đường thẳng (d) với trục hoành và trục tung. Ta tính được: $OA = \frac{ 1-2m }{ m-2 }; OB = 2m-1 $	0,25x2
	Do khoảng cách từ O đến (d) có giá trị bằng 2 nên ta có: $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} = \frac{(m-2)^2}{(1-2m)^2} + \frac{1}{(2m-1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{m^2 - 4m + 5}{4m^2 - 4m + 1}$	0,5
	$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 4m^2 - 16m + 20 \Leftrightarrow m = \frac{19}{12}$ Vậy $m = \frac{19}{12}$ thì khoảng cách từ O đến (d) có giá trị bằng 2.	0,5
b) (1.5đ)	Dự đoán điểm rơi là $x = y = \frac{1}{2}$ nên ta có: $P \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2} = 2\sqrt{\frac{1}{xy} + xy} = 2\sqrt{\frac{15}{16xy} + xy + \frac{1}{16xy}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{16xy}}$	0,5

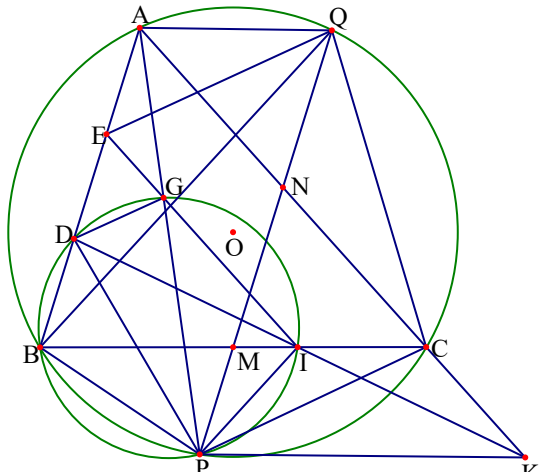
	Từ $x + y \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{15}{16xy} \geq \frac{15}{4}$	0,5
	$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4}} = \sqrt{17}$ Vậy GTNN của P là $\sqrt{17}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$	0,5

Bài 4. (5.0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D bất kì trên cạnh AB . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CA . Gọi P và Q là các giao điểm của MN với đường tròn (O) (điểm P thuộc cung nhỏ BC và điểm Q thuộc cung nhỏ CA). Gọi I là giao điểm khác B của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP . Gọi K là giao điểm của DI với AC .

a) Chứng minh tứ giác $CIPK$ nội tiếp đường tròn.

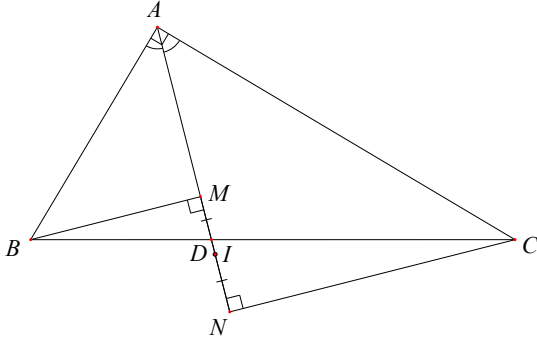
b) Chứng minh $PK \cdot QC = QB \cdot PD$.

c) Gọi G là giao điểm khác P của AP với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP . Đường thẳng IG cắt BA tại E . Chứng minh khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\frac{AD}{AE}$ không đổi.

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
		
a) (2.0đ)	Chứng minh tứ giác $CIPK$ nội tiếp đường tròn. Ta có các tứ giác $ABPC$ và $BDIP$ nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{PCK} = \widehat{ABP} = \widehat{DBP} = \widehat{PIK}$ nên suy ra tứ giác $CIPK$ nội tiếp đường tròn.	2,0
b) (2.0đ)	Chứng minh: $PK \cdot QC = QB \cdot PD$ Do tứ giác $BDIP$ và $CIPK$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{PDK} = \widehat{PBC}$ và $\widehat{PKD} = \widehat{PCB}$ nên hai tam giác BPC và DPK đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{PD}{PK} = \frac{PB}{PC}$.	0,5
	Tam giác MBP và MQC , có: $\widehat{PBM} = \widehat{QCM}$ và $\widehat{BPM} = \widehat{QCM}$ nên đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{PB}{QC} = \frac{PM}{CM}$.	0,5
	Chứng minh tương tự ta có hai tam giác BMQ và PMC đồng dạng nên $\frac{PC}{QB} = \frac{PM}{BM}$. Mà M là trung điểm của BC hay $MB = MC$ nên suy ra $\frac{PB}{QC} = \frac{PC}{QB}$ hay $\frac{PB}{PC} = \frac{QC}{QB}$.	0,5
	Kết hợp với $\frac{PD}{PK} = \frac{PB}{PC}$ ta được $\frac{PD}{PK} = \frac{QC}{QB}$ hay $PK \cdot QC = QB \cdot PD$.	0,5

C) (1.0đ)	Chứng minh khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\frac{AD}{AE}$ không đổi. Ta có $\hat{B}IG = \hat{B}PG = \hat{B}PA = \hat{B}CA$ nên suy ra $IE \parallel AC$, do đó ta được $\hat{DEG} = \hat{BAC}$. Lại có $\hat{EDG} = \hat{EIB} = \hat{ACB}$ nên hai tam giác ABC và EGD đồng dạng với nhau, do đó suy ra $\frac{ED}{DG} = \frac{AC}{BC}$.	0,25
	Mặt khác dễ thấy hai tam giác ADG và APB đồng dạng với nhau nên $\frac{AD}{DG} = \frac{AP}{PB}$.	0,25
	Đến đây ta suy ra được $\frac{ED}{DG} : \frac{AD}{DG} = \frac{AC}{BC} : \frac{AP}{PB}$ hay $\frac{ED}{AD} = \frac{AC \cdot PB}{BC \cdot AP}$.	0,25
	Do tam giác ABC cố định nên suy ra P cũng là điểm cố định nên $\frac{ED}{AD} = \frac{AC \cdot PB}{BC \cdot AP}$ không đổi hay $\frac{AE}{AD} = 1 - \frac{DE}{AD}$ không đổi. Do vậy $\frac{AD}{AE}$ có giá trị không đổi khi D thay đổi trên AB .	0,25

Bài 5. (2.0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD . Chứng minh $AD \leq \frac{1}{2}(BM + CN)$.

Nội dung trình bày	Điểm
	
AD là phân giác của $\hat{BAC} \Rightarrow \hat{DAB} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AMB$ và $\triangle ANC$ vuông cân $\Rightarrow MA = MB; NA = NC \Rightarrow AM + AN = BM + CN$.	0,5
Không mất tính tổng quát, giả sử $AB \leq AC$. Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \leq 1$. Do $\triangle BDM$ đồng dạng với $\triangle CDN$ nên $\frac{DM}{DN} = \frac{DB}{DC} \leq 1 \Rightarrow DM \leq DN$	0,5
Gọi I là trung điểm của MN , khi đó $AD \leq AI$ và $AM + AN = 2AI$	0,5
Từ $AD \leq AI \Rightarrow 2 \cdot AD \leq 2 \cdot AI = AM + AN = BM + CN \Rightarrow AD \leq \frac{1}{2}(BM + CN)$	0,5