

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính

a) $\left[\left(\frac{2}{191} - \frac{3}{382} \right) \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1011} + \frac{11}{2022} \right) \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2} \right]$

b) $\sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2023}{2024} \right)^0$

c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{99^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$

2) Tính giá trị biểu thức $A = (x - 2y + z + 25)^{2023}$

biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 19$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Tìm x , biết

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \dots \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32} = \frac{1}{2^{2x+1}}$

c) $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| = 102x$

2) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{2021} = \frac{y}{2022} = \frac{z}{2023}$.

Chứng minh: $(x - z)^3 = 8(x - y)^2(y - z)$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho a, b là các số nguyên dương, chứng minh rằng biểu thức $ab(a^2 + 2)(b^2 + 2)$ luôn chia hết cho 9.

b) Tìm cặp số tự nhiên $(x; y)$ trong đó y là chữ số, biết rằng: $1 + 2 + \dots + (x - 1) = \overline{yy}y - x$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A ($AB > BC$). Gọi F là trung điểm của AC , qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt đường thẳng BC tại M . Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

a) Chứng minh: $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.

b) Chứng minh: $AM = CN$

c) Lấy điểm D trên cạnh AC , điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Trên tia BM lấy I sao cho $BI = DE$. Chứng minh: $EI \parallel DB$ và $BD > \frac{BC + DE}{2}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số nguyên dương $a; b; c$ thỏa mãn $a + b + c = 2023$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phải là một số nguyên: $A = \frac{a}{2023 - c} + \frac{b}{2023 - a} + \frac{c}{2023 - b}$

----- Hết -----

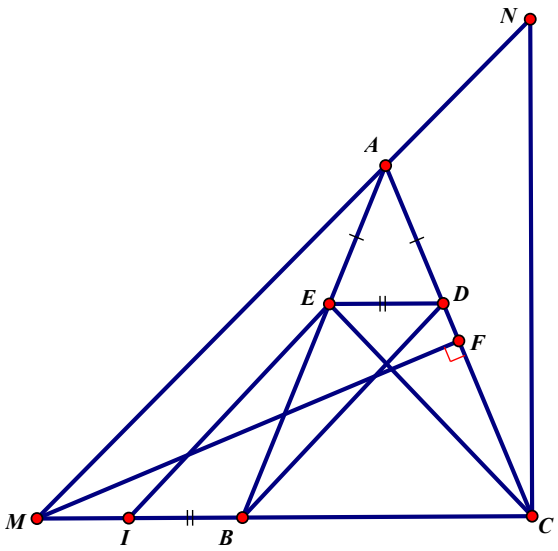
(Chú ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài.)

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI OLYMPIC
NĂM HỌC 2022 -2023
Môn: Toán – Lớp 7

<i>Câu</i>	<i>ý</i>	<i>Nội dung</i>	<i>Điểm</i>
Câu 1 2,0 điểm	1)	1) Thực hiện phép tính a) $\left[\left(\frac{2}{191} - \frac{3}{382} \right) \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1011} + \frac{11}{2022} \right) \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2} \right]$ b) $\sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2023}{2024} \right)^0$ c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{99^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$	
		a) $\left[\left(\frac{2}{191} - \frac{3}{382} \right) \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1011} + \frac{11}{2022} \right) \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2} \right]$ $= \left[\left(\frac{4}{382} - \frac{3}{382} \right) \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{14}{2022} + \frac{11}{2022} \right) \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2} \right]$ $= \left[\frac{1}{382} \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\frac{25}{2022} \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2} \right]$	0,25
		$= \left[\frac{1}{34} + \frac{33}{34} \right] : \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right]$ $= 1 : 5 = \frac{1}{5}$	0,25
		b) $\sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2023}{2024} \right)^0$ $= \sqrt{121 - 72} - \frac{3}{2} : \frac{5}{2} - 1 = \sqrt{49} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1$	0,25
		$= 7 - \frac{3}{5} - 1 = 6 - \frac{3}{5} = \frac{27}{5}$	0,25
		c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{101^2} - 1 \right)$ Do tích có 100 thừa số âm nên tích mang dấu dương. $\left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{101^2} - 1 \right)$ $= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{100.102}{101^2}$	0,25
		$= \frac{1.3.2.4 \dots 100.102}{2^2.3^2.4^2 \dots 101^2}$ $= \frac{1.2.3.4 \dots 100}{2.3.4 \dots 101} \cdot \frac{3.4.5 \dots 102}{2.3.4 \dots 101} = \frac{1}{101} \cdot \frac{102}{2} = \frac{51}{101}$	0,25
	2)	Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 19$	

Câu 2 2,0 điểm	1)	Ta có: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ $\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z - 3x - 4y}{1} = \frac{3x + 4y + 5z - 3x - 4y}{1+1+1} = \frac{5z}{3}$ $\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z}{3}$ $\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$	0,25
		Lại có: $2x + y = z - 19 \Rightarrow 2x + y - z = -19$ Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x + y - z}{2 \cdot 20 + 15 - 36} = \frac{-19}{19} = -1$ Suy ra: $x = -20; y = -15; z = -36$ Vậy $A = (-20 + 30 - 36 + 25)^{2023} = -1$	0,25
		1) Tìm x, biết a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \dots \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32} = \frac{1}{2^{2x+1}}$ c) $\left x + \frac{1}{101} \right + \left x + \frac{2}{101} \right + \left x + \frac{3}{101} \right + \dots + \left x + \frac{100}{101} \right = 102x$	
		a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$ $\frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{-1}{10}$ $\frac{2}{3} - x = \frac{2}{5} : \frac{-1}{10}$ $\frac{2}{3} - x = -4$ $x = \frac{2}{3} + 4$ $x = \frac{14}{3}$ Vậy $x = \frac{14}{3}$	0,25
		b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \dots \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32} = \frac{1}{2^{2x+1}}$ $\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \dots \frac{14}{2 \cdot 15} \cdot \frac{15}{2 \cdot 16} = \frac{1}{2^{2x+1}}$ $\frac{1}{2^{15}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 15 \cdot 16} = \frac{1}{2^{2x+1}}$ $\frac{1}{2^{15}} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2^{2x+1}}$	0,25

		$\frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{2^{2x+1}}$ $2x+1=19$ $2x=18$ $x=9$ Vậy $x=9$	0,25
		c) $\left x + \frac{1}{101}\right + \left x + \frac{2}{101}\right + \left x + \frac{3}{101}\right + \dots + \left x + \frac{100}{101}\right = 102x$ Điều kiện: $102x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ Với $x \geq 0$ ta có: $x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 102x$	0,25
		$\Leftrightarrow (100x - 102x) + \frac{1}{101} \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 0$ $\Leftrightarrow -2x + 50 = 0$ $\Leftrightarrow -2x = -50$ $\Leftrightarrow x = 25 \text{ (TMĐK)}$ Vậy $x = 25$	0,25
	2)	Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{2021} = \frac{y}{2022} = \frac{z}{2023}$. Chứng minh rằng: $(x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$	
		Ta có: $\frac{x}{2021} = \frac{y}{2022} = \frac{z}{2023}$ $\Rightarrow \frac{x-z}{2021-2023} = \frac{x-y}{2021-2022} = \frac{y-z}{2022-2023}$ $\Rightarrow \frac{x-z}{-2} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1}$	0,25
		$\Rightarrow \left(\frac{x-z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x-y}{-1}\right)^2 \cdot \frac{y-z}{-1}$ $\Rightarrow \frac{(x-z)^3}{(-2)^3} = \frac{(x-y)^2}{(-1)^2} \cdot \frac{y-z}{-1}$ $\Rightarrow (x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$ Vậy $(x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$.	0,25
Câu 3 2,0 điểm	1)	a) Cho a, b là các số nguyên dương chứng minh biểu thức $ab(a^2+2)(b^2+2)$ luôn chia hết cho 9.	
		Nếu $a:3$ thì $a(a^2+2):3$ Nếu $a \not:3$ thì $a^2:3$ dư 1 nên a^2+2 hay $a(a^2+2):3$	0,5
		Suy ra $a(a^2+2):3$ với mọi số nguyên dương a Tương tự $b(b^2+2):3$ với mọi số nguyên dương b	0,25
		Suy ra $ab(a^2+2)(b^2+2)$ luôn chia hết cho 9.	0,25

Câu 4 3,0 điểm		b) Tìm số cặp số tự nhiên $(x; y)$, y là chữ số biết: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x-1) = \overline{yyy} - x$	
		Ta có : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x-1) = \overline{yyy} - x$ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x-1) + x = \overline{yyy}$ Mà: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$ và $\overline{yyy} = y.111 = y.3.37$	0,25
		$\Rightarrow \frac{x(x+1)}{2} = y.3.37 \Rightarrow x(x+1) = 2.3.37.y$ $\Rightarrow x(x+1)$ chia hết cho 37 $\Rightarrow x$ hoặc $x+1$ chia hết cho 37 (vì $(x, x+1)=1$) (1)	0,25
		2) Ta có: $\frac{x(x+1)}{2} = \overline{yyy} \leq 999 \Rightarrow x(x+1) \leq 1998 \Rightarrow x < 45$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $x=37$ hoặc $x+1=37$	0,25
		+) Với $x=37$ thì $\overline{yyy} = \frac{37.38}{2} = 703$ (không thỏa mãn) +) Với $x+1=37$ thì $\overline{yyy} = \frac{36.37}{2} = 666$ (thỏa mãn) Vậy $(x; y) = (36; 6)$	0,25
	a)		0,25
		Chứng minh $\triangle MAC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{AMC} = 180^\circ - 2\widehat{ACB} \quad (1)$	0,5
		Lại có: $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{ACB} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.	0,5
		$\widehat{ABM} = \widehat{CAN}$ (kề bù với hai góc bằng nhau)	0,5
		Xét $\triangle BMA$ và $\triangle ANC$ có:	0,5

	b) $BM = AN(GT);$ $AB = AC(GT);$ $\widehat{ABM} = \widehat{CAN}$ (chứng minh trên) Suy ra $\triangle BMA = \triangle ANC(c.g.c).$ $\Rightarrow MA = NC$	
	Vì $AD = AE$ nên tam giác ADE cân tại A và $DC = BE$ Ta có tam giác AED và ABC cân tại A nên $\widehat{AED} = \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$ Suy ra $DE \parallel BC$	0,25
	Xét tam giác BIE và EDB có: $BI = DE$ $\widehat{EBI} = \widehat{BED}$ (do $DE \parallel BC$) BE: cạnh chung. Suy ra $\triangle BIE = \triangle EDB(c.g.c) \Rightarrow EI \parallel DB$	0,25
	c) Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CED$ có: $DC = BE$ ED là cạnh chung $\widehat{BED} = \widehat{CDE}$ Suy ra $\triangle BED = \triangle CDE(c.g.c) \Rightarrow BD = CE(1).$ Lại có: $\triangle BIE = \triangle EDB \Rightarrow IE = DB(2)$ Từ (1) và (2) suy ra $CE = IE = BD.$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong tam giác EIC ta có: $EI + EC > IC = IB + BC = DE + BC.$ Hay $2BD > DE + BC \Rightarrow BD > \frac{DE + BC}{2}$. Vậy $BD > \frac{BC + DE}{2}$.	0,25
Câu 5 1,0 điểm	Cho các số nguyên dương $a; b; c$ thỏa mãn $a + b + c = 2023$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phải là một số nguyên: $A = \frac{a}{2023 - c} + \frac{b}{2023 - a} + \frac{c}{2023 - b}$	
	Theo bài ra ta có $a + b + c = 2023 \Rightarrow \begin{cases} 2023 - c = a + b \\ 2023 - a = b + c \\ 2023 - b = a + c \end{cases}$	0,25

		$A = \frac{a}{2023-c} + \frac{b}{2023-a} + \frac{c}{2023-b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c}$	
		Vì a, b, c là các số nguyên dương nên $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{a+c+b} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$	0,25
		Chứng minh: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$	0,25
		Ta có $\frac{a}{a+b}; \frac{b}{b+c}; \frac{c}{a+c} < 1$ nên $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{b+c+a} + \frac{c+b}{a+c+b} = \frac{2 \cdot (a+b+c)}{a+b+c} = 2$ Vì $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.	0,25

**Lưu ý: Học sinh làm cách khác nếu đúng yêu cầu của bài vẫn cho điểm tối đa.*