

Câu I. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm tất cả các số nguyên của x để $|2A-1|+1=2A$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4$.
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \end{cases}$$

Câu III. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Câu IV. (4,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O . Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại K , đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O) .

1. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.
2. Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.
3. Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh rằng các đường thẳng AK , BC và HJ cùng đi qua một điểm.
4. Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại P , Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

--- HẾT ---

Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thẻ nhớ.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1..... Cán bộ coi thi số 2.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

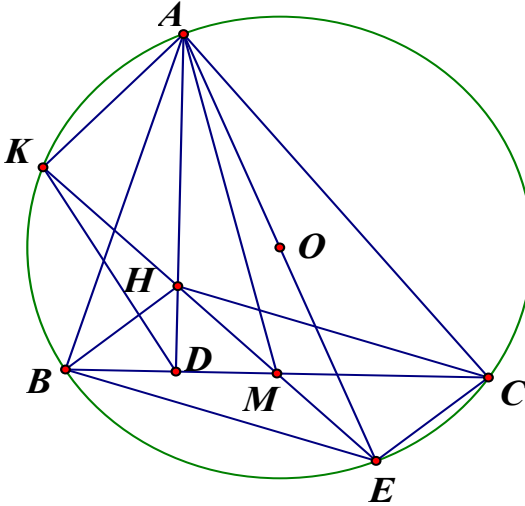
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)

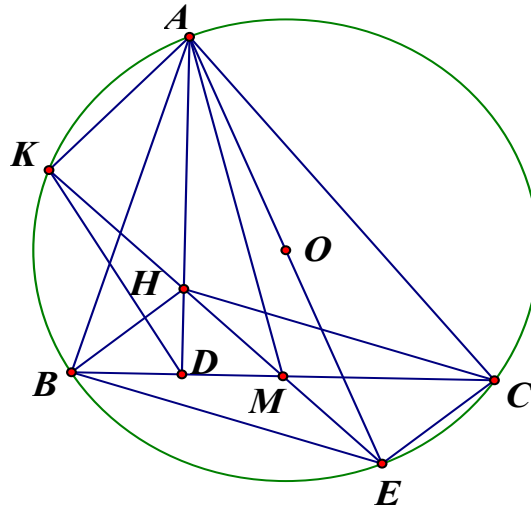
Ghi chú:

- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

CÁC CÁCH GIẢI KHÁC NHAU ĐƯỢC CHO ĐIỂM TƯƠNG ĐƯƠNG.		Nội dung	Điểm
Câu I (2,0 điểm) .			
Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.			
1.(1,5 điểm) Rút gọn biểu thức A .			
$A = \frac{(\sqrt{x})^3-1}{1+\sqrt{x}+x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right]$			0,5
$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}+x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right]$			0,25
$= (\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$			0,25
$= (\sqrt{x}-1) \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$			0,25
$= \frac{2}{\sqrt{x}+1}$.			0,25
2.(0,5 điểm) Tìm tất cả các số nguyên của x để $ 2A-1 +1=2A$.			
+) $ 2A-1 +1=2A \Leftrightarrow 2A-1 =2A-1 \Leftrightarrow 2A-1 \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \frac{1}{2}$			0,25
+) $\frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 9$			0,25
Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4 \Rightarrow x \in \{0; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$			
Câu II (2,0 điểm).			
1.(1,0 điểm) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4$.			
$(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4 \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=(x-1)(2x-4)$ $\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x^2+6x+16}-2x+4)=0$			0,25
+) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$			0,25
+) $\sqrt{x^2+6x+16}=2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^2+6x+16=(2x-4)^2 \end{cases}$			

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 - 22x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0(l) \\ x = \frac{22}{3}(tm) \end{cases}$	0,25
Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{22}{3}$	0,25
2.(1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + xy(2y - x) + 2x^2 + 6x = xy + y^3 + 3y & (1) \\ \sqrt{3(x^2 + y) + 7} + \sqrt{5x^2 + 5y + 14} = 4 - y - x^2 & (2) \end{cases}$	
Điều kiện: $\begin{cases} 3(x^2 + y) + 7 \geq 0 \\ 5x^2 + 5y + 14 \geq 0 \end{cases}$ Phương trình (1) tương đương với $2x^3 + 2xy^2 - x^2y + 2x^2 + 6x = xy + y^3 + 3y$ $\Leftrightarrow (2x^3 - x^2y) + (2xy^2 - y^3) + (2x^2 - xy) + (6x - 3y) = 0$ $\Leftrightarrow x^2(2x - y) + y^2(2x - y) + x(2x - y) + 3(2x - y) = 0$ $\Leftrightarrow (2x - y)(x^2 + y^2 + x + 3) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (2x - y)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{11}{4}\right] = 0$ $\Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$	0,25
Thay $y = 2x$ vào phương trình (2) ta được $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$ $\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2 + 6x + 7} - 2) + (\sqrt{5x^2 + 10x + 14} - 3) + (x^2 + 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{3(x+1)^2}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5(x+1)^2}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + (x+1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 \left(\frac{3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + 1 \right) = 0$	0,25
Vì $\frac{3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + 1 > 0$ nên phương trình tương đương với $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-2 (tm)$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-1; -2)$	0,25
Câu III. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024} + 2^{2027} + 2^n$ là số chính phương.	
Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $2^{2024} + 2^{2027} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{2024} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow (k + 3 \cdot 2^{1012})(k - 3 \cdot 2^{1012}) = 2^n$	0,25
$\Rightarrow \begin{cases} k + 3 \cdot 2^{1012} = 2^a \\ k - 3 \cdot 2^{1012} = 2^b \end{cases} \Rightarrow 2^a - 2^b = 3 \cdot 2^{1013}$ $a, b \in \mathbb{N}, a + b = n$	0,25

$\Leftrightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 3 \cdot 2^{1013} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b} - 1 = 3 \\ 2^b = 2^{1013} \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ b=1013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1015 \\ b=1013 \end{cases} \Rightarrow n=2028$ Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024} + 2^{2027} + 2^n$ là số chính phương	0,25
Câu IV. (4 điểm) Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).	
	
1. (1,0 điểm) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.	
$AH \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$ $\widehat{ABE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)	0,25
Mà $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)	0,25
Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.	0,25
2. (1,0 điểm) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.	



Ta có $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC \perp AC$.

Mà H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó suy ra $EC \parallel BH$.

Tương tự $HC \parallel BE$

0,25

Xét tứ giác $BHCE$ có $EC \parallel BH$ và $HC \parallel BE$ nên tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

0,25

Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, M, E thẳng hàng.

Lại có ba điểm M, K, H thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm K, H, E thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AKE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$.

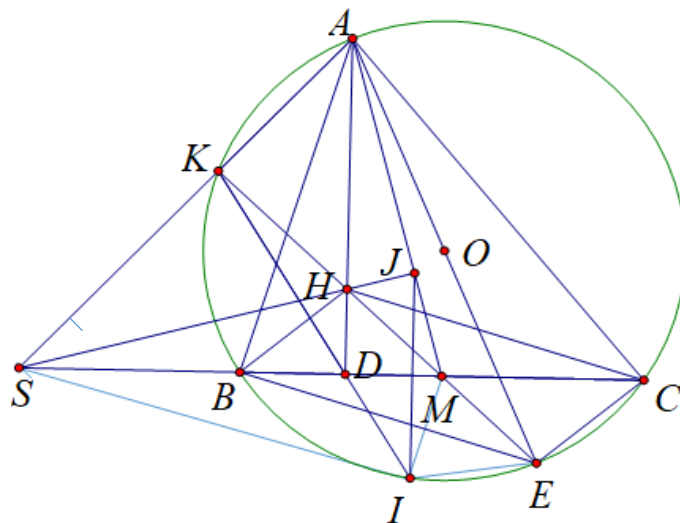
Xét $\triangle AKH$ và $\triangle MDH$ có: $\widehat{AKM} = \widehat{MDH} (= 90^\circ)$; $\widehat{KHA} = \widehat{DHM}$ (hai góc đối đỉnh).

0,25

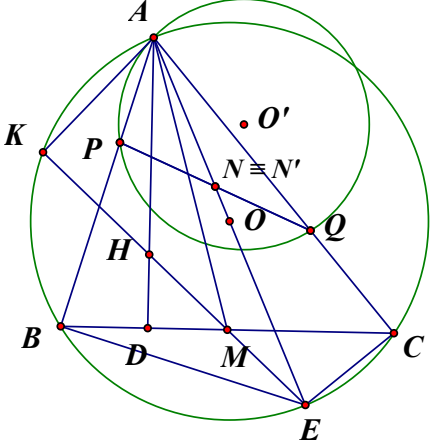
$$\Rightarrow \triangle AKH \square \triangle MDH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HA}{HM} = \frac{HK}{HD} \Rightarrow HA \cdot HD = HK \cdot HM.$$

0,25

3. (1,0 điểm) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.



Kéo dài AK cắt đường thẳng BC tại S , $\triangle SAM$ có hai đường cao AD và MK cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác SAM .

Xét tam giác $\triangle HDM$ và $\triangle SDA$ có $\widehat{ADS} = \widehat{HDM} = 90^\circ$ và $\widehat{DMH} = \widehat{DAS}$ (cùng phụ với $\widehat{ASM}$). $\Rightarrow \triangle HDM \square \triangle SDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HD}{DM} = \frac{DS}{AD}. \quad (1)$ Tương tự H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow \triangle BDH \square \triangle ADC \Rightarrow \frac{BD}{HD} = \frac{AD}{CD}. \quad (2)$	0,25
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{HD}{DM} \cdot \frac{BD}{HD} = \frac{DS}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{DS}{CD} \Rightarrow BD \cdot CD = DM \cdot DS \quad (3)$ Mà $\triangle BDK \square \triangle IDC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{ID} = \frac{DK}{DC} \Rightarrow BD \cdot CD = DI \cdot DK \quad (4)$	0,25
Từ (3) và (4) $\Rightarrow DI \cdot DK = DM \cdot DS$ nên $SKMI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SMI} = \widehat{SKI}$. Mà $AKDM$ là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{AKM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{SKI} = \widehat{DMA}$. Từ đó suy ra $\widehat{SMI} = \widehat{DMA}$. Xét $\triangle MIJ$ có $\widehat{SMI} = \widehat{DMA}$ và $IJ \perp BC \Rightarrow BC$ là đường trung trực của IJ.	0,25
$\Rightarrow \widehat{SJM} = \widehat{SIM} = 90^\circ$ (vì $SKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{SIM} = 180^\circ - \widehat{SKM} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$) $\Rightarrow SJ \perp AM$. Mà H là trực tâm $\triangle SAM \Rightarrow SH \perp AM$. Từ đó suy ra ba điểm S, H, J thẳng hàng. Vậy các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua điểm S.	0,25
4.(1,0 điểm) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.	
	
Gọi N' là giao điểm của PQ và AE. Xét $\triangle AQN'$ và $\triangle BEM$ có: $\widehat{QAN'} = \widehat{EBM}; \widehat{AQN'} = \widehat{KAP} = \widehat{BEM}$ $\Rightarrow \triangle AQN' \square \triangle BEM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AN'}{QN'} = \frac{BM}{EM} \quad (5)$	0,25
Do $\widehat{QAN'} = \widehat{EBM}; \widehat{AQN'} = \widehat{KAP} = \widehat{BEM}$ nên theo tính chất góc ngoài của $\triangle AQN'$ và $\triangle BEM$ ta có $\widehat{EMC} = \widehat{PN'A}$.	0,25

Mà $\widehat{PAN'} = \widehat{ECM}$ nên $\triangle ECM \square \triangle PAN' (g.g) \Rightarrow \frac{CM}{EM} = \frac{AN'}{PN'}. (6)$	0,25
Từ (5) và (6) và kết hợp $BM = CM \Rightarrow \frac{AN'}{QN'} = \frac{AN'}{PN'} \Rightarrow QN' = PN' \Rightarrow N \equiv N'.$	
Vậy AN luôn đi qua một điểm cố định O .	0,25
Câu V. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}.$	
Với $a, b, c > 0$, chứng minh được: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$	0,25
Với $a, b > 0$, ta có : $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (4a^2 + 4ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$ $= (2a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (2a+b)^2$ $\Rightarrow \sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2} \geq \sqrt{(2a+b)^2} = 2a+b$	0,25
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$ Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right); \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a}\right)$	0,25
$P \leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow P \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$ Vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.	0,25