

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1: (4 điểm.)

a) Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ Tính $a^7 + b^7$.

b) Giải phương trình sau với $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x - 2}.$$

Bài 2: (5 điểm)

a) Cho $a = n^3 + 2n$ và $b = n^4 + 3n^2 + 1$. Với mỗi n là số tự nhiên, hãy tìm ước chung lớn nhất của a và b .

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương x, y thì

$$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4 \text{ là số chính phương}$$

Bài 3: (5 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho $m^2 + 12$ là số chính phương

b) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$ Chứng minh rằng $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$.

Bài 4: (2 điểm) Trên 3 cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC , lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$. Gọi S_{MNP}, S_{ABC} lần lượt là diện tích tam giác MNP và tam giác ABC Tìm k để $S_{MNP} = \frac{3}{8}S_{ABC}$

Bài 5: (4 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (R là một độ dài cho trước). Gọi C, D là hai điểm trên nửa đường tròn đó sao cho C thuộc cung $\widehat{AD}$ và $\widehat{COD} = 120^\circ$. Gọi giao điểm của hai dây AD và BC là E , giao điểm của các đường thẳng AC và BD là F .

a) Chứng minh rằng 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn và tính bán kính của đường tròn đó theo R .

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác FAB theo R khi C, D thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết bài toán.

----- HẾT -----