
Câu 1.(3,00 điểm) Cho biểu thức: $A = \sqrt{x + \frac{3}{4}} + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + x$.

- Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.
- Tính x khi $A = 2$.

Câu 2.(4,00 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 505x + 253y = 2022 \\ x^3 + 3(x^2 + y^2) + 4x = y^3 + 4y - 4. \end{cases}$$

Câu 3.(3,00 điểm) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x + y) + 4 = 5xy$.

Câu 4.(3,00 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA , M là một điểm thuộc (O) sao cho $MA > MB$. Đường thẳng MC cắt (O) tại D (D khác M), đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại E (E khác D), đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại F .

- Chứng minh $AF = AO$.
- Đường thẳng qua M song song với DE cắt AB tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai N . Chứng minh rằng 3 điểm F, D, N thẳng hàng.
- Trong trường hợp $EF = MC$, tính độ dài đoạn thẳng CH theo R .

Câu 5.(5,00 điểm)

- Cho a, b, c là 3 số dương. Chứng minh rằng: $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a + b + c$.
- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{y}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{z}{x}}$.

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Câu 6.(2,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AD . Gọi E, F, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC . Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AG và EF . Chứng minh rằng $\frac{1}{HG} = \frac{1}{HA} + \frac{1}{HE} + \frac{1}{HF}$.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....;Số báo danh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....;Chữ kí giám thị 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

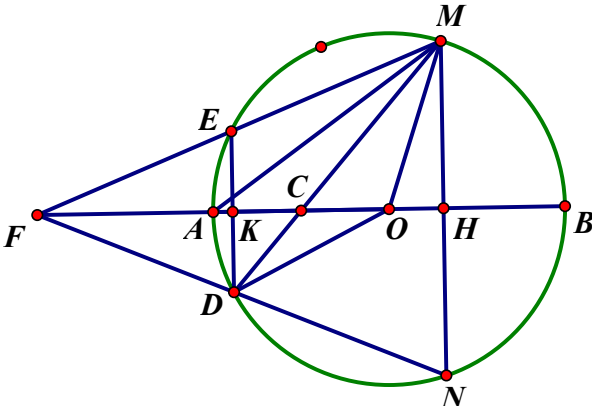
(Gồm có 04 trang)

1. Hướng dẫn chung

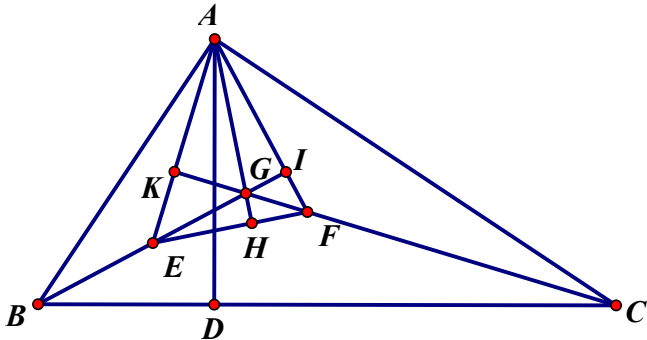
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1	Cho biểu thức : $A = \sqrt{x + \frac{3}{4}} + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + x$. a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa. b) Tính x khi $A = 2$.	3,00 đ
	a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa	1,00 đ
	Vì $x + \frac{3}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{2}} = \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$ nên điều kiện của x để A có nghĩa là: $x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$	0,50 đ 0,50 đ
	b) Tính x biết $A = 2$.	2,00 đ
	Biến đổi ta có: $\sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right)^2} + x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + x = 2$	1,00 đ
	$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$	0,50 đ
2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 505x + 253y = 2022 & (1) \\ x^3 + 3(x^2 + y^2) + 4x = y^3 + 4y - 4 & (2) \end{cases}$	4,00 đ
	Phương trình (2) tương đương: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x + 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + y - 1$ $\Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (y-1)^3 + y - 1 \quad (3).$	1,00 đ
	Đặt $u = x+1; v = y-1$ thì phương trình (3) là: $u^3 + u = v^3 + v \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \quad (4).$	1,00 đ

	Ta thấy: $u^2 + uv + v^2 + 1 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 1 > 0$ nên từ (4) suy ra $u = v$.	1,00 đ
	Từ $u = v$ ta có: $x + 1 = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 2$. Thế vào (1) ta được: $505x + 253(x + 2) = 2022 \Leftrightarrow 758x = 1516 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$.	0,50 đ
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 4)$.	0,50 đ
3	Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x + y) + 4 = 5xy$ (1).	3,00 đ
	Biến đổi (1): $5xy - 2x - 2y = 4 \Leftrightarrow y(5x - 2) - \frac{2}{5}(5x - 2) = 4 + \frac{4}{5}$ $\Leftrightarrow (5x - 2)(5y - 2) = 24$ (2).	1,00 đ
	Giả sử $x \leq y$ thì $5x - 2 \leq 5y - 2$.	0,50 đ
	Từ (2) ta có các hệ phương trình sau: $a) \begin{cases} 5x - 2 = 1 \\ 5y - 2 = 24 \end{cases}; b) \begin{cases} 5x - 2 = -24 \\ 5y - 2 = -1 \end{cases}$ $c) \begin{cases} 5x - 2 = 2 \\ 5y - 2 = 12 \end{cases}; d) \begin{cases} 5x - 2 = -12 \\ 5y - 2 = -2 \end{cases}$ $e) \begin{cases} 5x - 2 = 3 \\ 5y - 2 = 8 \end{cases}; f) \begin{cases} 5x - 2 = -8 \\ 5y - 2 = -3 \end{cases}$ $g) \begin{cases} 5x - 2 = 4 \\ 5y - 2 = 6 \end{cases}; k) \begin{cases} 5x - 2 = -6 \\ 5y - 2 = -4 \end{cases}$	1,00 đ
	Chỉ có hệ d) có nghiệm nguyên $(x; y) = (-2; 0)$ và hệ e) có nghiệm nguyên $(x; y) = (1; 2)$. Vậy hệ có 4 cặp nghiệm $(x; y): (1; 2), (2; 1), (-2; 0), (0; -2)$.	0,50 đ
4		3,00 đ
		
	a) Chứng minh $AF = AO$	1,00 đ
	Để thấy $\triangle MOA$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{AMO} = \widehat{AMC} + \widehat{CMO}$ (1). Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\widehat{MAO} = \widehat{FMA} + \widehat{MFA}$ (2). Từ (1) và (2) kết hợp với $\widehat{AMC} = \widehat{FMA}$ suy ra $\widehat{CMO} = \widehat{MFA}$ Suy ra $\triangle OMC \sim \triangle OFM(g.g) \Rightarrow \frac{MF}{MC} = \frac{MO}{OC} = 2$.	0,50 đ

	Vì điểm A nằm chính giữa cung DE nên MA là đường phân giác của ΔMFC $\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{MF}{MC} = 2 \quad (3) \Rightarrow AF = 2AC \Rightarrow AF = AO$.	0,50 đ
	b) Chứng minh 3 điểm F, D, K thẳng hàng	1,00 đ
	Vì $MN \parallel DE$ và $AB \perp DE$ suy ra $AB \perp MN$ nên $\widehat{MB} = \widehat{BN} \Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{AN} \Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{NBF}$ $\Rightarrow \Delta MBF = \Delta NBF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{NFB} \quad (4)$.	0,50 đ
	Gọi K là giao điểm của ED và AB . ΔEFD có FK vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên cân tại F suy ra $\widehat{EFK} = \widehat{DFK} \quad (5)$. Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{DFB} = \widehat{NFB}$; hay F, D, N thẳng hàng.	0,50 đ
	c) Tính số đo CH theo R khi $EF = MC$	1,00 đ
	Khi $EF = MC$, kết hợp với (3) suy ra $EF = EM$. Vì $ED \parallel MN$ (gt) nên ED là đường trung bình ΔMFN , suy ra D là trung điểm của FN .	0,50 đ
	Khi đó C là trọng tâm $\Delta MFN \Rightarrow CH = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3}{4}R$.	0,50 đ
5		5,00 đ
	a) Cho a, b, c là 3 số dương. CMR: $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a+b+c$.	2,50 đ
	Xét hiệu: $P = (a+b+c) - \left(\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \right)$.	0,50 đ
	Ta thấy: $P = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} + \frac{b+c}{2} - \frac{2bc}{b+c} + \frac{c+a}{2} - \frac{2ca}{c+a}$ $= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} + \frac{(b+c)^2 - 4bc}{2(b+c)} + \frac{(c+a)^2 - 4ca}{2(c+a)}$ $= \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} + \frac{(b-c)^2}{2(b+c)} + \frac{(c-a)^2}{2(c+a)}$.	1,50 đ
	Vì a, b, c là 3 số dương nên $a+b > 0, b+c > 0, c+a > 0$ nên $P \geq 0$ (Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$). Theo định nghĩa bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.	0,50 đ
	b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{y}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{z}{x}} \quad (1)$.	2,50 đ
	Chứng minh rằng $x = y = z$.	
	Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}$ thì $a > 0, b > 0$. (1) viết lại là: $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}$.	0,50 đ
	$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} \right)^2 = \frac{1}{1+ab} - \frac{2}{(1+a)(1+b)}$ $\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2} = \frac{a+b-ab-1}{(1+ab)(1+a)(1+b)}$	0,50 đ

	$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(1+a)(1+b)} = \frac{-(1-a)(1-b)}{1+ab}$ $\Leftrightarrow (1+ab)(a-b)^2 + (1-a^2)(1-b^2) = 0$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + (ab-1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2 = (ab-1)^2 = 0 \text{ (do } ab > 0)$ $\Leftrightarrow a = b = 1.$ Vì vậy $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y = z$ (đpcm).	1,00 đ
6		2,00 đ
		
	Gọi I, K lần lượt là giao điểm của BE với AF và CF với AE. Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ACK}$. Mà $\widehat{BAE} + \widehat{EAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} + \widehat{KAC} = 90^\circ$ do đó $CK \perp AE$ hay $FK \perp AE$ (1). Chứng minh tương tự ta cũng có $EI \perp AF$ (2).	0,50 đ
	Từ (1) và (2), kết hợp với EI và FK cùng đi qua điểm G suy ra G là trực tâm của tam giác AEF, do đó AH là đường cao của tam giác AEF. Ta thấy $\triangle HGF \sim \triangle HEA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HG}{HE} = \frac{HF}{HA} \Rightarrow HG.HA = HE.HF$ $\Rightarrow HG.(HG + GA) = HE.HF$ (3).	0,50 đ
	Mặt khác $\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAD} + \widehat{DAE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{FAK} = 45^\circ$ Suy ra tam giác $\triangle AKF$ vuông cân $\Rightarrow KA = KF \Rightarrow \triangle KAG = \triangle KFE$ (g.c.g) $\Rightarrow AG = EF$ (4).	0,50 đ
	Từ (3) và (4) ta có: $HG.(HG + EF) = HE.HF \Leftrightarrow HG.(HG + HE + HF) = HE.HF.$ Chia hai vế đẳng thức trên cho biểu thức $HE.HF.HG$ với chú ý rằng $HE.HF = HG.HA$ ta được $\frac{1}{HG} = \frac{1}{HA} + \frac{1}{HE} + \frac{1}{HF}$.	0,50 đ