

TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP LỚP 9 HKII

Năm học: 2017 – 2018

MÔN TOÁN

DẠNG 1: Biến đổi các biểu thức chứa căn

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm x để $A < 0$
- 3) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên

Bài 2: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} \right)$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm các giá trị của x để $P > 0$
- 3) Tính giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Bài 3: Cho biểu thức: $C = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^2}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$

- 1) Rút gọn C
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 8 - 2\sqrt{7}$
- 3) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C bằng -3
- 4) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C lớn hơn $-\frac{1}{3}$
- 5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C nhỏ hơn $2\sqrt{x} + 3$

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

- 1) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$, tính giá trị biểu thức A
- 2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$
- 3) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ với $x = 7 + 4\sqrt{3}$

- 1) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 4}{x - \sqrt{x} - 2}$. Chứng minh rằng $B = \frac{3}{2 - \sqrt{x}}$
- 2) Tìm x để $P = \frac{B}{A} < -1$

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 1}$

- 1) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức A
- 2) Tìm các giá trị của x để B = 1
- 3) Tìm m để $\frac{B\sqrt{x}}{A} = m$ có nghiệm.

Bài 7: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x + 3}{x - 9} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$ với $x > 0, x \neq 9$

- 1) Rút gọn B
- 2) Tính giá trị của B khi $x = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} - \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$
- 3) Chứng minh $B > \frac{1}{3}$

Bài 8: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x}$; $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1}$

- a) Tính giá trị B tại $x = 36$

b) Rút gọn A

c) Tìm số nguyên P để $P = A.B$ là số nguyên.

Bài 9: Cho biểu thức $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm x để $B = 2$

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

2) Tính $P = \frac{B}{A}$

3) Tìm x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x} + 2\sqrt{x-1} = 2x - 2\sqrt{2x} + 4$

Bài 10: Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ và $Q = \frac{6}{x-3\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị Q tại $x = 121$

b) Rút gọn P

c) Tìm giá trị của x để $A = \frac{Q}{P} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2}$

d) So sánh A và A^2

DẠNG 2: Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bài 1: Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định trước.

Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc lên 10km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định và thời gian lần bánh trên đường biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Bài 2: Quãng đường AB dài 220km. Hai ô tô khởi hành từ A và B đi ngược chiều nhau. Nếu cùng khởi hành thì sau 2 giờ chúng sẽ gặp nhau. Nếu xe đi từ A khởi

hành trước xe kia 1 giờ 6 phút thì hai xe gặp nhau sau khi xe đi từ A đi được 2 giờ 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài 3: Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc 30km/h, sau đó lại ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1h 20p. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược là bằng nhau.

Bài 4: Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81km và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4h, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 5: Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2h với năng suất dự kiến người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

Bài 6: Một đội sản xuất làm 1000 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, mỗi ngày đội làm thêm được 10 sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy, chẳng những đã làm vượt mức kế hoạch 80 sản phẩm mà còn hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với quy định. Tính số sản phẩm đội sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch.

Bài 7: Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm chung trong 6h. Sau 2h làm chung thì tổ hai bị điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10h. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Bài 8: Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở 120 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành đội được bổ sung thêm 5 xe nữa cùng loại. Nhờ vậy, so với ban đầu, mỗi xe phải chở ít hơn 2 tấn. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe. Biết khối lượng mỗi xe phải chở như nhau.

Bài 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài 10: Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

DẠNG 3: Hệ phương trình

Bài 1: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

- 1) Giải phương trình với $m = 1$
- 2) Tìm m để hệ vô nghiệm

Bài 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$$

- 1) Giải hệ phương trình $m = 1$
- 2) Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x - y = 2$
- 3) Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Bài 3: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$$
. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất mà $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ -mx + y = m \end{cases}$

- 1) Giải hệ khi $m = 2$
- 2) Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x > 0, y < 0$
- 3) Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.

Bài 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ -mx + y = m \end{cases}$

- 1) CMR hệ có nghiệm duy nhất với mọi m
- 2) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất sao cho $x < 1, y < 1$

DẠNG 4: Quan hệ giữa (P) và (d)

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{3}{2}x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = \frac{1}{2}x - 2$ có đồ thị (d).

- 1) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ
- 2) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)
- 3) Không tính, hãy so sánh
 - a) $f(-2)$ và $f(-3)$
 - b) $f(1 - \sqrt{2})$ và $f(\sqrt{3} - 2)$

Bài 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P)

- 1) Tìm các điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt bằng -1 và 2 .
- 2) Viết phương trình đường thẳng AB
- 3) Viết phương trình đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 3: Cho parabol $(P): y = ax^2$

- 1) Tìm a biết (P) đi qua điểm A thuộc đường thẳng $(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ có hoành độ bằng 2.
- 2) Tìm giao điểm B còn lại của (d) và (P)
- 3) Tính diện tích tam giác OAB

Bài 4: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = mx + 2m + 1$ có đồ thị (d)

- 1) Chứng minh (d) luôn đi qua một điểm M cố định
- 2) Tìm a để (P) đi qua điểm cố định đó
- 3) Viết phương trình đường thẳng qua M và tiếp xúc với parabol (P) tại M .

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = 2x - \frac{3}{2}$

- 1) Vẽ (d) và (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy
- 2) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (d) và (P) . Tính chu vi $\triangle AOB$
- 3) Tìm tọa độ giao điểm C thuộc Ox để chu vi $\triangle ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$

- 1) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc là k là đi qua $M(1,5; -1)$
- 2) Tìm k để đường thẳng (d) và parabol (P) tiếp xúc nhau
- 3) Tìm k để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Bài 7: Cho hàm số $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và $(d): y = \frac{1}{2}x + n$

- 1) Cho $n = 1$
 - a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ

- b) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d)
- c) Tính diện tích $\triangle AOB$
- 2) Tìm n để (P) tiếp xúc với (d)
- 3) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm
- 4) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung.

Bài 8: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + m + 1$

- 1) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B
- 2) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B. Tìm m để $|x_1 - x_2| = 2$
- 3) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm cùng bên trái của trục tung.

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol (P), đường thẳng $y = mx + 2$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1 + x_2$ mà $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P), đường thẳng d: $y = -mx - m + 1$.

Tìm m để d cắt parabol (P) tại A và phân biệt với $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ mà $(y_1 + y_2)$ nhỏ nhất.

DẠNG 5: Phương trình bậc hai

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$, m là tham số

- 1) Giải phương trình trên khi $m = 1$
- 2) Xác định m để phương trình có một nghiệm là 2. Khi đó phương trình còn một nghiệm nữa, tìm nghiệm đó?
- 3) CMR phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
- 4) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$

5) Định m để phương trình có nghiệm này bằng 3 nghiệm kia.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$, m là tham số

- 1) CMR phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m
- 2) Với $m \neq 0$. Hãy lập phương trình ẩn y có hai nghiệm là $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$
- 3) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 3$
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2(k+3)x + 2k - 1 = 0$, k là tham số

- 1) Giải phương trình khi $k = \frac{1}{2}$
- 2) Tìm k để phương trình có một nghiệm là 3, khi đó phương trình còn một nghiệm nữa, tìm nghiệm ấy.
- 3) CMR phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi k
- 4) CMR giữa tổng và tích các nghiệm có một sự liên hệ không phụ thuộc k?
- 5) Tìm k để phương trình x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{3}{x_1 x_2} = 2$
- 6) Tìm k để tổng bình phương các nghiệm có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$, m là tham số

- 1) Giải phương trình khi $x = -5$
- 2) CMR phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m
- 3) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

5) CMR biểu thức $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc m

6) Tính giá trị của biểu thức $x_1 - x_2$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 3(m - 1)x + m - 3 = 0$, m là tham số

1) CMR phương trình luôn có nghiệm với mọi m

2) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m

3) Xác định m để phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$, m là tham số

1) CM phương trình luôn có nghiệm với mọi m

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $B = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$

3) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

Bài 7: Cho phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ m là tham số

1) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_2 - x_1 = 17$

2) Tìm m để biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất

3) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào x.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$.

Bài 9: Cho phương trình $x^4 - 2x^2 + m - 2 = 0$, m là tham số

1) Giải phương trình khi m = - 1

2) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

Bài 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)|x| + m^2 - 1 = 0$, m là tham số. Tìm m là phương trình có nghiệm duy nhất.

DẠNG 6: Hình học

Bài 1: Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNP (MN < MP) đến (O) sao cho tia MP nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi K là trung điểm của NP

- 1) Chứng minh rằng các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh tia KM là phân giác của $\widehat{AKB}$
- 3) Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh rằng $AQ \parallel NP$.
- 4) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh rằng $MA^2 = MH.MO = MN.MP$
- 5) Chứng minh rằng 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn
- 6) Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng $AB^2 = 4HE.HF$ (F là giao điểm của AB và NP).
- 7) Chứng minh rằng KEMH là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng OK.OE không đổi.
- 8) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$
- 9) Chứng minh $\widehat{NHA} = \widehat{PHA}$
- 10) Chứng minh rằng KE là phân giác góc ngoài của $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra $AE.BF = AF.BE$
- 11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của $\triangle NAP$ luôn chạy trên một đường tròn cố định.

- 12) Nếu $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB .

Bài 2: Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N . Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P . Chứng minh:

- 1) Tứ giác $OMNP$ nội tiếp
- 2) Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành
- 3) $CM.CN$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M
- 4) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CND$ di chuyển trên một cung tròn cố định nào.

Bài 3: Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng (d) vuông góc với AC tại A . Vẽ đường tròn đường kính BC , trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D ; tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N ; tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $ABMD$ nội tiếp được
- 2) Tứ giác $APND$ là hình gì? Tại sao?
- 3) Chứng minh rằng $CM.CD$ không phụ thuộc vị trí của M
- 4) Chứng minh trọng tâm G của $\triangle MAC$ chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

Bài 4: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây BC cố định (BC không qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Điểm E thuộc cung lớn BC . Nối AE cắt BC tại D . Hạ $CH \perp AE$ tại H ; CH cắt BE tại M . Gọi I là trung điểm của BC

- 1) Chứng minh bốn điểm A, I, H, C thuộc một đường tròn

- 2) Chứng minh khi E chuyển động trên cung lớn BC thì tích $AD.AE$ không đổi
- 3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle BED$ tiếp xúc với AB
- 4) Tìm vị trí của E để diện tích $\triangle MAC$ lớn nhất

Bài 5: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và H (O và O' ở hai phía của AH). Vẽ các đường kính AOB và AO'C của hai đường tròn. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại M, cắt đường tròn (O') tại N.

- 1) Chứng minh ba điểm B, H, C thẳng hàng
- 2) Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì tỉ số $\frac{HM}{HN}$ không đổi
- 3) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh bốn điểm A, H, I, K thuộc một đường tròn
- 4) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích $\triangle HMN$ lớn nhất.

Bài 6: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R = 2R'$). Điểm B thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho $AB = R$. Điểm M thuộc cung lớn AB của đường tròn $(O; R)$ sao cho $MA \leq MB$. Nối MA cắt đường tròn $(O'; R')$ tại N. Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt đường tròn $(O'; R')$ tại E, cắt MB tại F.

- 1) Chứng minh $\triangle AOM$ đồng dạng với $\triangle AO'N$
- 2) Chứng minh rằng độ dài đoạn NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của đường tròn $(O; R)$.
- 3) Chứng minh ABFE là hình thang cân
- 4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác ABFN lớn nhất.

Bài 7: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm của đoạn OB. Dây CD vuông góc với AB tại M. Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K. Nối BE cắt CD tại H.

- 1) Chứng minh bốn điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh $AE.AK$ không đổi
- 3) Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC
- 4) Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHK$ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm E chuyển động trên cung lớn CD.

Bài 8: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Điểm M thuộc nửa đường tròn. Gọi H là điểm chính giữa cung AM. Tia BH cắt AM tại I. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A cắt BH tại K. Nối AH cắt BM tại E.

- 1) Chứng minh $\triangle BAE$ là tam giác cân. Chứng minh $KH.KB = KE^2$
- 2) Đường tròn tâm B, bán kính BA cắt AM tại N. Chứng minh tứ giác BIEN nội tiếp
- 3) Tìm vị trí của M để $\widehat{MKA} = 90^\circ$

Bài 9: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OB, H khác O và B. Dây CD vuông góc với AB tại H. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Nối CO và DO cắt đường thẳng d tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt đường tròn (O) tại E và F. ($E \neq C, F \neq D$)

- 1) Chứng minh MNFE là tứ giác nội tiếp
- 2) Chứng minh $ME.MC = NF.ND$
- 3) Tìm vị trí của H để AE OF là hình thoi
- 4) Lấy K đối xứng với C qua A. Gọi G là trọng tâm $\triangle KAB$. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OB thì G thuộc một đường tròn cố định.

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi E' là điểm đối xứng với H qua AC, F' là điểm đối xứng với H qua AB. Chứng minh

- 1) Tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O)
- 2) Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn
- 3) AO và EF vuông góc với nhau
- 4) Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ không đổi.

DẠNG 7: Một số bài nâng cao

Bài 1: Giải các phương trình sau

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

Bài 3: Cho đường thẳng $y = (m-1)x + 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng đó lớn nhất.

Bài 4: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$. Gọi A và B là hai giao điểm của (d) và (P). Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để diện tích $\triangle ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: Cho 4 số a, b, c, d bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Bài 6: Cho a, b, c > 0. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

Bài 7: Cho $c > 0$ và $a, b \geq c$. Chứng minh $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Bài 8: Cho $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)}$$

Bài 9: Cho $a, b \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}}$

Bài 10: Giả sử n là một số tự nhiên khác không, chứng minh

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1

Bài 1: ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$

1) Rút gọn A:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \\ A &= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ A &= \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} \\ A &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} \\ A &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

2) Tìm x để $A < 0$

$$\text{Để } A < 0 \text{ thì } \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+1 > 0) \Leftrightarrow x < 1$$

Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1$ ta có: Với $0 < x < 1$ thì $A < 0$.

3) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Với x nguyên để A nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x} - 1 \in U(2)$

$\sqrt{x}-1$	1	-1	2	-2
x	4 (TM)	0(KTM)	9 (TM)	Vô nghiệm

Vậy $x \in \{4, 9\}$ thì A nhận giá trị nguyên.

Bài 2: ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 4; x \neq 1$

1) Rút gọn P:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} \right) \\
 P &= \left(\frac{x-4\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) \\
 P &= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) : \left(\frac{x-4-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) \\
 P &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\
 P &= \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

2) Tìm các giá trị của x để $P > 0$.

$$P > 0 \text{ thì } \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 9$$

Kết hợp điều kiện ta có:

Với $x > 9$ thì $P > 0$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Ta có $\sqrt{P}$ có nghĩa khi

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$$

Với $x \geq 9$ thì $\sqrt{P} \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 9$. $\sqrt{P}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0

Bài 3: ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$

1) Rút gọn C:

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \\ C &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \\ C &= \left(\frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot (x-\sqrt{x}+1-\sqrt{x}) \\ C &= \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot (\sqrt{x}-1)^2 \\ C &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 \\ C &= \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

2) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 8 - 2\sqrt{7}$

$$x = 8 - 2\sqrt{7} = 7 - 2\sqrt{7} + 1 = (\sqrt{7}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{7}-1| = \sqrt{7}-1$$

$$\text{Vậy } C = \sqrt{x} - 1 = \sqrt{7} - 1 - 1 = \sqrt{7} - 2$$

3) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C bằng -3

$$C = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = -3 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để giá trị biểu thức $C = -3$

4) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C lớn hơn $\frac{-1}{3}$

$$C > \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \frac{4}{9}$$

Kết hợp điều kiện ta có $x > \frac{4}{9}; x \neq 1$ thì $C > \frac{-1}{3}$

5) Tìm giá trị của x để C nhỏ hơn $2\sqrt{x} + 3$

Ta có $C < 2\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 2\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow -4 < 2\sqrt{x}$ (nghiệm đúng với $x \geq 0; x \neq 1$)

Vậy với mọi $x \geq 0; x \neq 1$ thì C nhỏ hơn $2\sqrt{x} + 3$

Bài 4: 1) ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$\text{Khi } x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5} - 1 \text{ (t/m)}$$

$$\text{Thay vào biểu thức A ta được } A = \frac{1 - (\sqrt{5} - 1)}{1 + (\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5}(2 - \sqrt{5})}{5}$$

Vậy.....

2) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 25$

Rút gọn B

$$B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$B = \left[\frac{15 - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x} + 5)}{x - 25} \right] \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

3) Với $x \geq 0; x \neq 25$.

$$\text{Ta có } M = B - A = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

Chứng minh

$$0 \leq M < 1$$

$$M \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow M = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (t/m)}$$

Vậy $x = 0$ thì M nhận giá trị nguyên

Bài 5:

1) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Khi } x = 7 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 2)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 2 \text{ (t/m)}$$

$$\text{Thay vào biểu thức A ta được } A = \frac{2 + \sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$$

Vậy.....

2) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4$

Rút gọn B

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-\sqrt{x}-2}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) + (1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{3}{2-\sqrt{x}}$$

3) Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$.

Ta có :

$$P = \frac{B}{A} < -1$$

$$P = \frac{3}{2-\sqrt{x}} : \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < -1$$

$$P = \frac{3}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{(2-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} < 0$$

$$P = \frac{x+5}{(2-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} < 0$$

$$\forall x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4 \rightarrow x+5 > 0$$

$$\rightarrow (2-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) < 0$$

Kết hợp điều kiện : $x > 4$ hoặc $0 \leq x < 1$

Bài 6: 1) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$

Rút gọn A:

$$A = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$A = \frac{x+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

2) Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$B=1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1} = 1 \Rightarrow 3(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-3) = x-1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-7=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x}-1| = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1+2\sqrt{2} \text{ (TM)} \\ x_2 = 1-2\sqrt{2} \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy.....

Bài 7.

1) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \left(\frac{x+3+\sqrt{x}-3}{x-9} \right) \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}} = x = \sqrt{5^2+2.5\sqrt{2}+2} - \sqrt{4^2+2.4\sqrt{2}+2} \\ &= \sqrt{(5+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(4+\sqrt{2})^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B(1) = \frac{1}{2}$$

3) Xét hiệu $B - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} > 0$ vậy $B > \frac{1}{3}$.

Bài 8.

1) Ta có $B(36) = \frac{\sqrt{36}-3}{\sqrt{36}+1} = \frac{3}{7}$

2) Ta có với $0 \leq x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1) + 11\sqrt{x}-3}{x-9} \\ &= \frac{2x-6\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}+3+11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3x+9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

3) Xét $P = A.B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ (với $0 \leq x \neq 9$)

$$\Leftrightarrow P = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \text{ để } P \text{ nguyên thì } \sqrt{x}+1 = \{1; 3\} \Leftrightarrow x = \{0; 4\}.$$

Bài 9.

1) Với $x \geq 0, x \neq 4$ để $B = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2\sqrt{x}-4 \Leftrightarrow x = 9$

2) Ta có $A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$$P = \frac{B}{A} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

3) Xét phương trình: $P(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x}-1) = x - 2\sqrt{x} + 4, (DK: x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x}-1) = 2x - 2\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 = x - 2\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài 10:

1. $Q = \frac{6}{x-3\sqrt{x}}$ (ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 9$)

Thay $x = 121$ vào Q ta được: $Q = \frac{6}{121-3\sqrt{121}} = \frac{6}{88} = \frac{3}{44}$

2. $P = \frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$. ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 9$

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

3. Ta có: $A = \frac{Q}{P} = \frac{6}{x-3\sqrt{x}} : \frac{6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$ ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 9$

$$= \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{6} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

Lại có: $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+6}{2\sqrt{x}} - \frac{2x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0$
 $\Rightarrow 2\sqrt{x}+6-2x-\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}-6 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$). Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 & (TM) \\ t=-\frac{3}{2} & (KTM) \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (TM ĐKXD)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \{4\}$

4. Xét hiệu:

$$A^2 - A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \right)^2 - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{x+6\sqrt{x}+9}{x} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{x+6\sqrt{x}+9-x-3\sqrt{x}}{x} = \frac{3\sqrt{x}+9}{x}$$

Vì $x > 0 \Rightarrow 3\sqrt{x}+9 > 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}+9}{x} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow A^2 - A > 0 \Rightarrow A^2 > A$

Vậy $A^2 > A$.

DẠNG 2:

Bài 1:

Gọi vận tốc dự định là x (km/h) (điều kiện: $x > 0$)

Thời gian dự định đi hết quãng đường AB là: $\frac{120}{x}$ (giờ)

Thời gian đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường AB là: $\frac{40}{x}$ (giờ)

Vận tốc đi trên $\frac{2}{3}$ quãng đường là: $x+10$ (km/h)

Thời gian đi hết $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại là: $\frac{80}{x+10}$ (giờ)

Vì người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút = $\frac{2}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{40}{x} - \frac{80}{x+10} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 120 \cdot (x+10)}{5x(x+10)} - \frac{5 \cdot 40 \cdot (x+10)}{5x(x+10)} - \frac{5 \cdot 80x}{5x(x+10)} = \frac{2x(x+10)}{5x(x+10)}$$

$$\Rightarrow 600x + 6000 - 200x - 2000 - 400x = 2x^2 + 20x \Leftrightarrow 2x^2 + 20x - 4000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow (x-40)(x+50) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 & (TM) \\ x = -50 & (KTM) \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự định đi hết quãng đường AB là 40km/h.

Thời gian lái bánh trên quãng đường AB là: $\frac{120}{40} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$ (giờ)

Bài 2:

Đổi: 1 giờ 6 phút = $\frac{11}{10}$ (giờ); 2 giờ 30 phút = $\frac{5}{2}$ (giờ)

Gọi vận tốc ô tô đi từ A đến B là x (km/h), (ĐK: $x > 0$)

Gọi vận tốc ô tô đi từ B đến A là y (km/h), (ĐK: $y > 0$)

Quãng đường ô tô đi từ A đến lúc hai xe gặp nhau là: $2x$ (km)

Quãng đường ô tô đi từ B đến lúc hai xe gặp nhau là: $2y$ (km)

Vì hai xe đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ nên ta có phương trình:

$$2x + 2y = 220 \Leftrightarrow x + y = 110 \quad (1)$$

2 giờ 30 phút ô tô đi từ A đi được quãng đường là: $\frac{5}{2}x$ (km)

Thời gian ô tô đi từ B đến lúc gặp nhau sau khi ô tô đi từ A đi được 2 giờ 30

phút là: $\frac{5}{2} - \frac{11}{10} = \frac{7}{5}$ (giờ)

$\frac{7}{5}$ giờ ô tô đi từ B đi được quãng đường là: $\frac{7}{5}y$ (km)

Vì hai ô tô đi ngược chiều và gặp nhau sau khi ô tô đi từ A đi được 2 giờ 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{5}{2}x + \frac{7}{5}y = 220$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ \frac{5}{2}x + \frac{7}{5}y = 220 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y = 275 \\ \frac{5}{2}x + \frac{7}{5}y = 220 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 110 \\ \frac{11}{10}y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 110 \\ y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 50 \end{cases} (TM)$$

Vậy vận tốc ô tô đi từ A là 60 km/h

Vận tốc ô tô đi từ B là 50 km/h

Bài 3:

Gọi khoảng cách giữa hai bến A, B là $x (x > 0, km)$

Ta có vận tốc xuôi dòng là $30 (km/h)$, vận tốc dòng nước là $5 (km/h)$ nên vận tốc thực của ca nô là $25 (km/h)$ và vận tốc ngược dòng là $20 (km/h)$.

Thời gian ca nô chạy xuôi dòng là: $\frac{x}{30} (h)$

Thời gian ca nô chạy ngược dòng là: $\frac{x}{20} (h)$

Vì thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược $1h20p = \frac{4}{3}h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{20} - \frac{x}{30} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x - 2x = 80 \Leftrightarrow x = 80(km) (TM)$$

Vậy khoảng cách giữa hai bến A, B là 80 (km).

Bài 4:

Gọi vận tốc thực của ca nô là $x(x > 0, km/h)$, vận tốc dòng nước là

$y(y > 0, y \neq x, km/h)$.

Ta có vận tốc xuôi dòng là: $x + y(km/h)$, vận tốc ngược dòng là: $x - y(km/h)$.

Lần thứ nhất ca nô chạy xuôi dòng 81 km và ngược dòng 105 km hết 8 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{81}{x+y} + \frac{105}{x-y} = 8 \quad (1)$$

Lần thứ hai ca nô chạy xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km hết 4 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{54}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{105}{x-y} = 8 \\ \frac{54}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \frac{1}{x+y} \\ b = \frac{1}{x-y} \end{cases}$, ta được hệ phương trình mới:

$$\begin{cases} 81a + 105b = 8 \\ 54a + 42b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81a + 105b = 8 \\ 81a + 63b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 42b = 2 \\ 27a + 21b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{21} \\ 27a + 21 \cdot \frac{1}{21} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{21} \\ 27a + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27a = 1 \\ b = \frac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{27} \\ b = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Trả lại biến cũ ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 48 \\ y = x - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} (TM)$$

Vậy vận tốc xuôi dòng là $27 (km/h)$ và vận tốc ngược dòng là $21 (km/h)$.

Bài 5:

Gọi số sản phẩm người công nhân đó dự định làm được trong 1 giờ là x ($x \in \mathbb{N}^*$, sản phẩm).

Sau khi tăng năng suất, số sản phẩm người đó làm đc trong 1 giờ là $x+2$ (sản phẩm).

Thời gian dự kiến hoàn thành công việc là: $\frac{150}{x}$ (h).

Số sản phẩm làm trong 2 giờ đầu là: $2x$ (sản phẩm).

Số sản phẩm còn lại làm sau khi tăng năng suất là: $150 - 2x$ (sản phẩm).

Thời gian làm số sản phẩm còn lại đó là: $\frac{150-2x}{x+2}$ (giờ).

Vì người đó hoàn thành sớm hơn dự định 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{150}{x} - \left(2 + \frac{150-2x}{x+2} \right) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{150}{x} - \frac{150-2x}{x+2} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 300(x+2) - 2x(150-2x) &= 5x(x+2) \\ \Leftrightarrow 300x + 600 - 300x + 4x^2 &= 5x^2 + 10x \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x - 600 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20(TM) \\ x = -30(L) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy năng suất dự kiến ban đầu là 20 sản phẩm.

Bài 6:

Gọi số sản phẩm mà đội phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (sản phẩm)

đk: $x > 2, x \in \mathbb{N}^*$

Số ngày cần hoàn thành công việc theo dự định là: $\frac{1000}{x}$ (ngày)

Trong thực tế mỗi ngày làm thêm được 10 sản phẩm nên số sản phẩm làm trong một ngày thực tế là: $x+10$ (sản phẩm)

Số ngày làm việc trong thực tế là: $\frac{1000}{x-2}$ (ngày)

Vì vậy đội vượt mức kế hoạch 80 sản phẩm nên số sản phẩm thực tế đội làm được là $1000 + 80 = 1080$ (sản phẩm) nên ta có phương trình:

$$(x+10).\left(\frac{1000}{x-2}\right)=1080$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 100x + 10000=0$$

Tìm được $x = -100$ (loại) hoặc $x = 50$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số sản phẩm mà đội phải làm trong một ngày theo kế hoạch là 50 sản phẩm.

Bài 7:

Gọi thời gian tổ một làm riêng và hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 6$).

Gọi thời gian tổ hai làm riêng và hoàn thành công việc là y (giờ, $y > 6$)

Mỗi giờ tổ một làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi giờ tổ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Biết hai tổ làm chung trong 6 giờ thì hoàn thành được công việc nên ta có phương trình:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1. \quad (1)$$

Thực tế để hoàn thành công việc này thì tổ hai làm trong 2 giờ và tổ một làm

trong $2+10=12$ (giờ), ta có phương trình: $\frac{12}{x} + \frac{2}{y} = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nếu làm riêng thì tổ một hoàn thành công việc trong 15 giờ và tổ hai hoàn thành công việc trong 10 giờ.

Bài 8:

Gọi số xe lúc đầu đội có là x (xe); $x > 0, x \in \mathbb{N}^*$

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở lúc đầu là $\frac{120}{x}$ (xe)

Số xe lúc sau của đội có là $x + 5$ (xe)

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở lúc sau là $\frac{120}{x+5}$ (tấn)

Vì sau khi được bổ sung thêm 5 xe cùng loại thì mỗi xe phải chở ít hơn 2 tấn nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - 2 = \frac{120}{x+5}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 15)(x + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ (thỏa mãn điều kiện) hoặc } x = -20 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số xe lúc đầu của đội là 15 xe

Bài 9:

Gọi chiều dài của mảnh đất là: x (m) (Đk: $x > 7$).

Chiều rộng mảnh đất là: $x - 7$ (m)

Vì độ dài đường chéo của mảnh đất hình chữ nhật là 13m, nên ta có phương trình:

$$(x-7)^2 + x^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 + x^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(l) \\ x = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Chiều rộng : } 12 - 7 = 5 \text{ (m)}$$

Vậy mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 12m; chiều rộng 5m.

Bài 10:

Gọi số có hai chữ số cần tìm là $\overline{ab}$ (Đk: $a, b \in N$; $0 < a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$)

Theo đề bài ra ta có:

$$a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$$

Vì tích của hai chữ số nhỏ hơn số đã cho là 12 nên ta có:

$$a.b = \overline{ab} - 12$$

$$\Rightarrow a.(10 - a) = \overline{a(10 - a)} - 12$$

$$\Rightarrow 10a - a^2 = 10a + 10 - a - 12$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1(l) \\ a = 2 \end{cases}$$

Suy ra: $b = 10 - 2 = 8$

Vậy số cần tìm là 28.

DẠNG 3: Hệ phương trình

Bài 1:

1) Với $m = 1$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 30 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 5x = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình khi $m = 1$ là $(x; y) = \left(\frac{36}{5}; \frac{14}{5}\right)$

2) Hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{1}{-3} \neq \frac{10}{6} \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$

Bài 2.

1) Thay $m = 1$ vào hệ phương trình có:

$$\begin{cases} -2x + y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy với $m = 1$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-2; 1)$

$$2) \begin{cases} -2mx + y = 5 & (1) \\ mx + 3y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y = 2mx + 5$$

$$\text{Thế vào (2) có: } mx + 3(2mx + 5) = 1 \Leftrightarrow mx = -2 (*)$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow m \neq 0$

Với $m \neq 0$ có: (*) $\Leftrightarrow x = \frac{-2}{m}$

Thay $x = \frac{-2}{m}$ vào (1) có: (1) $\Leftrightarrow y = 2m. \frac{-2}{m} + 5 = 1$

Vậy với $m \neq 0$ hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\frac{-2}{m}; 1)$

Có $x - y = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{m} - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{-2}{m} = 3 \Rightarrow -2 = 3m \Leftrightarrow m = \frac{-2}{3} (TM)$$

Vậy $m = \frac{-2}{3}$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn: $x - y = 2$.

3) Với $m \neq 0$ hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\frac{-2}{m}; 1) \Rightarrow M(\frac{-2}{m}; 1) \Rightarrow M$ thuộc đường thẳng $y = 1$ với mọi $m \neq 0$.

Bài 3.
$$\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 & (1) \\ 2x - y = m+5 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = 2x - m - 5$$

Thế (2) vào (1) có:

$$(1) \Leftrightarrow (m-1)x - m(2x - m - 5) = 3m - 1$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x = (m+1)^2 (*)$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow m + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq -1$$

Với $m \neq -1$ có: (*) $\Leftrightarrow x = m + 1$

Thay $x = m + 1$ vào (2) có: (2) $\Leftrightarrow y = 2(m + 1) - m - 5 = m - 3$

Vậy với $m \neq -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m + 1; m - 3)$

$$S = x^2 + y^2 = (m + 1)^2 + (m - 3)^2 = m^2 - 4m + 10 = (m - 2)^2 + 6 \geq 6 \quad \forall m \neq -1.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = 2$ (TM)

Vậy với $m = 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất mà $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. 1) Thay $m = 2$ vào hệ phương trình có:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; \frac{1}{2})$

$$2) \begin{cases} x + my = 2 & (1) \\ mx - 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 2 - my$$

Thế (1) vào (2) có:

$$(2) \Leftrightarrow m(2 - my) - 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 2)y = 2m - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2m-1}{m^2+2} \quad (\text{vì } m^2 + 2 \neq 0 \forall m)$$

$$\text{Thay } y = \frac{2m-1}{m^2+2} \text{ vào (1) có: } x = 2 - m \cdot \frac{2m-1}{m^2+2} = \frac{m+4}{m^2+2}$$

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m+4}{m^2+2}; \frac{2m-1}{m^2+2}\right)$ với mọi m .

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+4}{m^2+2} > 0 \\ \frac{2m-1}{m^2+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 > 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < \frac{1}{2}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x > 0$ và $y < 0$.

3) Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m+4}{m^2+2}; \frac{2m-1}{m^2+2}\right)$ với mọi giá trị m .

$$x = \frac{m+4}{m^2+2}$$

có $m \in \mathbb{Z}$ thì $m - 4 \in \mathbb{Z}$.

$$\text{TH1: } m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{9} \\ y = \frac{7}{18} \end{cases} \Rightarrow m = 4 \text{ không thỏa mãn.}$$

$$\text{TH2: } m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$$

$$x \in \mathbb{Z} \text{ mà } m - 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m - 4)x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{m^2 - 16}{m^2 + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 - \frac{18}{m^2 + 2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2 \in U(18)$$

$$\text{Mà } m^2 + 2 \geq 2 \quad \forall m$$

$$\Rightarrow m^2 + 2 \in \{2; 3; 6; 9; 18\}$$

Ta có bảng:

$m^2 + 2$	2	3		6		9	18	
m^2	0	1		4		7	16	
m	0	1	-1	2	-2	$\pm\sqrt{7}$	4	-4
$x = \frac{m+4}{m^2+2}$	2	$\frac{5}{3}$	1	1	$\frac{1}{3}$			0
$y = \frac{2m-1}{m^2+2}$	$-\frac{1}{2}$		-1	$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$
KL	KTM	KTM	TM	KTM	KTM	KTM	KTM	KTM

Vậy $m = -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x; y$ là các số nguyên.

Bài 5:

$$\text{a. } \begin{cases} x + my = 1 \\ -mx + y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ -m(1 - my) + y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ -m + m^2y + y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ (m^2 + 1)y = 2m \end{cases} \quad (\text{I})$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $(m^2 + 1)y = 2m$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 \neq 0$$

Có $m^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi m

b. Phương trình có nghiệm duy nhất với mọi m (theo câu a).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m \cdot \frac{2m}{m^2 + 2} = 1 - \frac{2m^2}{m^2 + 2} \\ y = \frac{2m}{m^2 + 2} \end{cases}$$

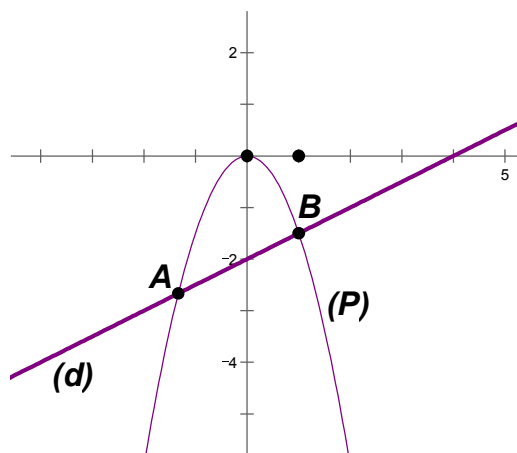
Theo đề bài:

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{2m^2}{m^2 + 2} < 1 \\ \frac{2m}{m^2 + 2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2m^2}{m^2 + 2} < 0 \\ \frac{2m}{m^2 + 2} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ \frac{-m^2 + 2m - 1}{m^2 + 2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ \frac{-(m-1)^2}{m^2 + 2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$$

DẠNG 4:

Bài 1:

1.



2. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-\frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy (d) và (P) cắt nhau tại $f(1-\sqrt{2}) < f(\sqrt{3}-2)$ hai điểm

$$A\left(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right) \text{ và } B\left(1; -\frac{3}{2}\right)$$

3.

$$a. f(-2) > f(-3)$$

$$b. f(1-\sqrt{2}) < f(\sqrt{3}-2)$$

Bài 2:

$$1. \text{ Thay } x = -1 \text{ vào hàm số ta được: } y = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào hàm số ta được: } y = -\frac{1}{2}(2)^2 = -2 \Rightarrow B(2; -2).$$

$$2. \text{ Gọi pt đường thẳng AB có dạng: } y = ax + b, (a \neq 0)$$

$$\text{Vì A, B thuộc đường thẳng nên ta có } \begin{cases} -\frac{1}{2} = -a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{PT AB: } y = -\frac{1}{2}x - 1$$

3. Gọi (d) là đường thẳng cần tìm

$$d // AB \Rightarrow d: y = -\frac{1}{2}x + b, b \neq -1$$

Xét pt hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$-\frac{1}{2}x + b = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + b = 0$$

Để (P) và (d) tiếp xúc thì pt trên có 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}$$

PT đường thẳng cần tìm là: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$

Bài 3.

1) Ta có : $A \in (d)$ và $x_A = 2$; $y_A = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1$. Tọa độ $A(2;1)$

(P) đi qua $A(2;1)$ nên : $1 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ (P): $y = \frac{1}{4}x^2$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy giao điểm còn lại là $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$

3) Gọi $A'; B'$ lần lượt là hình chiếu của $A; B$ lên trục Ox .

Khi đó tọa độ $A'(2;0), B'(-1;0)$

Diện tích tam giác OAB là :

$$S_{OAB} = S_{A'B'BA} - S_{A'AO} - S_{OBB'} = \frac{1}{2}(|x_A| + |x_B|)(|y_A| + |y_B|) - \frac{1}{2}|x_A| \cdot |y_A| - \frac{1}{2}|x_B| \cdot |y_B| = \frac{5}{8}$$

Bài 4.

- 1) Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số đi qua

$$\text{Khi đó : } y_0 = mx_0 + 2m + 1 \Leftrightarrow (x_0 + 2)m - y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ -y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $M(-2;1)$

- 2) Đồ thị (P) đi qua $M(-2;1)$ nên : $1 = a \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$$\text{Vậy } (P): y = \frac{1}{4}x^2$$

- 3) Phương trình đường thẳng có dạng : $y = ax + b$

Đường thẳng đi qua $M(-2;1)$ nên : $1 = -2a + b$ (1)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$ax + b = \frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có : } \Delta' = (-2a)^2 + 4b = 4a + 4b$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc parabol (P) khi pt(2) có nghiệm kép hay

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = -b \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) \& (3) ta có : } \begin{cases} a = \frac{-1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy đường thẳng cần tìm là : } y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

Bài 5.

- 1) HS tự vẽ hình

- 2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P): \frac{1}{2}x^2 = 2x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Tọa độ $A\left(1;\frac{1}{2}\right), B\left(3;\frac{9}{2}\right)$

Ta có : $AO = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$BO = \sqrt{(3-0)^2 + \left(\frac{9}{2}-0\right)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5}$$

Vậy chu vi $\Delta ABC : \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{2} + 2\sqrt{5}$ (đvvcv)

3) Gọi $C(x;0) \in Ox$

Chu vi $\Delta ABC : AB + AC + BC$

Do AB không đổi nên chu vi ΔABC nhỏ nhất khi $AC + CB$ nhỏ nhất

Gọi $A'\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ là điểm đối xứng của A qua Ox

Khi đó $CA = CA' \Rightarrow CA + CB = CA' + CB \geq A'B \Rightarrow CA + CB$ nhỏ nhất khi A', C, B thẳng hàng

Hay C là giao điểm của $A'B$ với Ox

Phương trình đường thẳng $A'B : y = \frac{5}{2}x - 3$

Vậy giao điểm $A'B$ và Ox là $C\left(\frac{6}{5};0\right)$

4) Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (P) :

$$nx + 1 = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2nx - 2 = 0 \quad (1)$$

Để (d_1) cắt (P) tại 2 điểm nằm cùng 1 phía với trục Ox thì pt (1) có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu nên: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ mà $P = -2 < 0$ nên không có giá trị n thỏa mãn

Bài 6: 1) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc k và đi qua điểm $M(1,5;-1)$

Đường thẳng (d) có hệ số góc k có dạng $y = kx + b$

Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1,5;-1)$ nên:

$$\begin{aligned} k.1,5 + b &= -1 \\ b &= -1 - 1,5k \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vậy đường thẳng (d): $y = kx - 1,5k - 1$

2) Tìm k để đường thẳng (d) và Parabol (P) tiếp xúc nhau

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P):

$$\frac{1}{4}x^2 = kx - 1,5k - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4kx + 6k + 4 = 0 \quad (a = 1, b = -4k, c = 6k + 4) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b'^2 - ac \\ &= (-2k)^2 - 1.(6k + 4) \\ &= 4k^2 - 6k - 4 \end{aligned}$$

Để thẳng (d) và Parabol (P) tiếp xúc nhau thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 25$$

Phương trình ẩn k có 2 nghiệm phân biệt: $k_1 = 2, k_2 = \frac{-1}{2}$

Vậy, để thẳng (d) và Parabol (P) tiếp xúc nhau thì: $k = 2; k = \frac{-1}{2}$

3) Tìm k để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt

Để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 > 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 2 > 0 \Leftrightarrow (k - 2)(k + \frac{1}{2}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k < \frac{-1}{2} \\ k > 2 \end{cases}$$

Vậy, để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì

$$k < \frac{-1}{2} \text{ hoặc } k > 2$$

Bài 7.

1) Cho $n = 1$:

- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ
- b) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d)
- c) Tính diện tích tam giác AOB

Với $n = 1$ thì (d): $y = \frac{1}{2}x + 1$

- a) Vẽ (P) và (d)
- b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(a=1, b=-1, c=-2)$$

Vì $a+b+c=1-(-1)-2=0$ nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

+ Với $x_1 = -1$ thì $y_1 = \frac{1}{2}$

+ Với $x_2 = 2$ thì $y_2 = 2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: $A(-1; \frac{1}{2})$ và $B(2; 2)$

2) Tìm n để (P) tiếp xúc với (d)

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x + n$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2n = 0 \quad (1)$$

$$(a=1, b=-1, c=-2n)$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-2n)$$

$$= 1 + 8n$$

Để (P) tiếp xúc với (d) thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 8n = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$$

Vậy, để (P) tiếp xúc với (d) thì $n = -\frac{1}{8}$

3) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm

Đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm thì phương trình (1) có 2 nghiệm

$$\Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 8n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-1}{8}$$

Vậy, đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm thì $n \geq \frac{-1}{8}$

- 4) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung

Đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung thì phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Rightarrow ac < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (-2n) < 0$$

$$\Leftrightarrow n > 0$$

Vậy, đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung thì $n > 0$

Bài 8. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = mx + m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$(a = 1, b = -m, c = -m - 1)$$

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m - 1)$$

$$= m^2 + 4m + 4$$

$$= (m + 2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m$$

Đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$$

Vậy, đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B thì $m \neq -2$

1) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B. Tìm m để $|x_1 - x_2| = 2$

Theo hệ thức Vi – et:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m - 1$$

Theo đề bài:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 2 &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (-m)^2 - 4(-m - 1) = 4 \Leftrightarrow m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m(m + 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ (TMĐK) hoặc } m = 4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy để $|x_1 - x_2| = 2$ thì $m = 0$ hoặc $m = 4$

2) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm cùng bên trái trục tung

Theo hệ thức Vi – et:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m - 1$$

Đế (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm cùng bên trái trục tung thì phương trình (1) có 2 nghiệm cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 \geq 0 \\ -m-1 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Vậy, (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm cùng bên trái trục tung thì $m < -1$

Bài 9:

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

d : $y = mx + 2$ là:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2mx + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 4 = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng d cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

Ta có $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (-4)$

$$= m^2 + 4 > 0 \quad \forall m.$$

Với $\forall m$ PT(1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của PT(1). Thì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d.

$$\text{Theo Vi ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } A = x_1^2 + x_2^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Thay hệ (*) vào A ta được $A = (2m)^2 - 2 \cdot (-4)$

$$= 4m^2 + 8.$$

$$\text{Vì } m^2 \geq 0 \quad \forall m \Leftrightarrow 4m^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow 4m^2 + 8 \geq 8$$

$$\Leftrightarrow A \geq 8$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với $m = 0$ thì đường thẳng d cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 mà $x_1 + x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 10

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng d:

$$y = -mx - m + 1 \text{ là: } x^2 = -mx - m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx + m - 1 = 0 \quad (1).$$

Để đường thẳng d cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{Từ pt (1) Ta thấy } a - b + c = 1 - m + m - 1 = 0$$

$$\text{Nên pt (1) luôn có nghiệm : } x_1 = -1 \text{ và } x_2 = \frac{-c}{a} = -(m - 1) = 1 - m.$$

$$\text{Để pt (1) có 2 nghiệm phân biệt thì : } x_1 \neq x_2$$

$$\Leftrightarrow -1 \neq 1 - m$$

$$\Leftrightarrow m \neq 2.$$

$$\text{Với } m \neq 2. \text{ Ta có } x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A(-1;1)$$

$$x_2 = 1 - m \Rightarrow y_2 = (1 - m)^2 \Rightarrow B(1 - m; (1 - m)^2)$$

$$\text{Ta có : } y_1 + y_2 = 1 + (1 - m)^2$$

$$\text{Mà } (1 - m)^2 \geq 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow (1 - m)^2 + 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 \geq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow (1 - m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m = 1$ thì đường thẳng d cắt parabol (P) tại điểm A và B phân biệt với $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ mà $(y_1 + y_2)$ nhỏ nhất.

DẠNG 5:

Bài 1: Cho pt : $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$ (1) m là tham số.

1. Giải pt khi $m = 1$.

$$\text{Với } m = 1 \quad \text{pt (1) có dạng : } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta &= (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1 > 0 \\ \Rightarrow \sqrt{\Delta} &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Vậy với $m = 1$ pt có tập nghiệm $S = \{2; 3\}$

2. Xác định m để pt có 1 nghiệm là 2. Khi đó pt còn 1 nghiệm nữa, tìm nghiệm đó?

Để pt (1) có 1 nghiệm $x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$

Hay $2^2 - (2m+3).2 + m^2 + 3m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m - 6 + m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

+ Nếu $m = 1$, nghiệm còn lại là 3 (phần 1).

+ Nếu $m = 0$ pt (1) có dạng: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Theo Vi_ét $x_1 x_2 = 2 \Rightarrow 2.x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 1 \Rightarrow$ Nghiệm còn lại là 1.

3. CMR pt luôn có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m$.

Ta có: $\Delta = [-(2m+3)]^2 - 4.1.(m^2 + 3m + 2) = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12m - 8 = 1 > 0 \forall m$

Vậy $\forall m$ pt (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

4. Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của pt. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

$\forall m$ gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của pt(1).

Theo Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3 \\ x_1 x_2 = m^2 + 3m + 2 \end{cases} \quad (I)$$

Đề: $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 \quad (*)$$

Thế hệ (I) vào biểu thức (*) Ta được : $(2m+3)^2 - 2.(m^2 + 3m + 2) = 1$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 9 - 2m^2 - 6m - 4 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 6m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 = 0(2)$$

Ta thấy $a - b + c = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow$ pt (2) có nghiệm $m_1 = -1; m_2 = -2$.

Vậy với $m = -1; m = -2$ thì pt có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

5. Xác định m để phương trình có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Giả sử pt (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ Theo Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3(3) \\ x_1 x_2 = m^2 + 3m + 2(4) \end{cases}$$

.Để $x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3x_2 + x_2$ (5).

Thế pt(3) vào pt(5) $\Rightarrow 2m + 3 = 4x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2m+3}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3(2m+3)}{4}$

Thay $x_2 = \frac{2m+3}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3(2m+3)}{4}$ vào pt(4)

$$\Rightarrow \frac{2m+3}{4} \cdot \frac{3(2m+3)}{4} = m^2 + 3m + 2$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 3(2m+3)^2 = 16(m^2 + 3m + 2) \\ &\Leftrightarrow 3(4m^2 + 12m + 9) = 16m^2 + 48m + 32 \\ &\Leftrightarrow 12m^2 + 36m + 27 - 16m^2 - 48m - 32 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4m^2 - 12m - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 5 = 0 \end{aligned}$$

Ta có: $\Delta' = 6^2 - 4.5 = 36 - 20 = 16 > 0$
 $\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{16} = 4$

Pt có 2 nghiệm $m_1 = \frac{-6+4}{4} = \frac{-1}{2}; m_2 = \frac{-6-4}{4} = \frac{-5}{2}$

Vậy với $m = \frac{-1}{2}; m = \frac{-5}{2}$ thì phương trình có nghiệm này bằng 3 lần nghiệm kia.

Bài 4

$$x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$$

1. Với $m = -5$ phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$

Phương trình có $a+b+c=0$ nên có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -9$

1) $\Delta' = [-(m+1)]^2 - 1.(m-4) = m^2 + m + 5 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \forall m$

♦ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

2. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$

3. Với mọi m ta có $\Delta' > 0$ gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Theo hệ thức vi-

et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m - 4 \end{cases}$$

Để phương trình có 2 nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1) > 0 \\ m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

$$\begin{aligned} 2) \quad A &= x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1) = x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_2x_1 = (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 \\ 3) \quad &= 2(m+1) - 2(m-4) = 2m+2 - 2m+8 = 10 \end{aligned}$$

4. Đặt $B = x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B^2 &= (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= 4(m+1)^2 - 4(m-4) = 4(m^2 + m + 5) \end{aligned}$$

$$4) \quad \Rightarrow B = \pm 2\sqrt{m^2 + m + 5}$$

Bài 5

$$5) \quad \Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad \forall m$$

Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

1. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Áp dụng hệ thức vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 & (1) \\ m = x_1x_2 + 3 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có

$$6) \quad x_1 + x_2 = 2(x_1x_2 + 3) - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$$

2. Phương trình có 2 nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu

$$7) \quad \Rightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Thay m=1 vào lại phương trình tìm được $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$ vậy m=1 thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 6: $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$

1/ Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m

$$\Delta' = (m - 2)^2 - 1(2m - 5)$$

$$= m^2 - 4m + 4 - 2m + 5$$

$$= m^2 - 6m + 9$$

$$= (m - 3)^2 \geq \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm với mọi m

2/ $\Delta' \geq \forall m \Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Theo Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m-2)}{1} = 2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m-5}{1} = 2m-5 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $B = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$

$$B = x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_1x_2 < 4$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 < 4$$

$$\Leftrightarrow 2(m - 2) - 2(2m - 5) < 4$$

$$\Leftrightarrow 2m - 4 - 4m + 10 - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2m + 2 < 0 \Leftrightarrow 2m > 2 \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy $m > 1$ thì phương trình có nghiệm sao cho $B < 4$

3/ Tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc vào m

Ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-4(1) \\ m = \frac{x_1 \cdot x_2 + 5}{2} \end{cases}$$
 thay vào (1) ta được

$$x_1 + x_2 = 2 \frac{x_1 \cdot x_2 + 5}{2} - 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + 5 - 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 - 1 = 0$$

Bài 7.

$$1/x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0 (*)$$

$$\Delta = (4m + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2(m - 4)$$

$$= 16m^2 + 2 \cdot 4m \cdot 1 + 1 - 8m + 32$$

$$= 16m^2 + 33 > 0 \text{ Với mọi } m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

$$\text{Theo Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(4m+1)}{1} = -(4m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2(m-4) \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta được } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-4) (2) \\ x_2 - x_1 = 17 (3) \end{cases}$$

Từ (3) $\Rightarrow x_2 = 17 + x_1$ (3') thế vào (1) ta được

$$x_1 + 17 + x_1 = -(4m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = -4m - 1 - 17$$

$$2x_1 = -4m - 18$$

$x_1 = -2m - 9$ thay vào (3') ta được.

$$x_2 = 17 + (-2m - 9)$$

$$x_2 = 17 - 2m - 9 = 8 - 2m$$

Thay x_1, x_2 vào (2) ta được:

$$(-2m - 9)(8 - 2m) = 2(m - 4)$$

$$\Leftrightarrow -16m + 4m^2 - 72 + 18m - 2m + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4 \text{ (TM)}$$

Vậy $m = \pm 4$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 t/m $x_2 - x_1 = 17$

$$2/ A = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$A = [-(4m + 1)]^2 - 4.2(m - 4)$$

$$= 16m^2 + 8m + 1 - 8m + 32$$

$$= 16m^2 + 33$$

Ta có $m^2 \geq 0$ với mọi m

$$\Rightarrow 16m^2 \geq 0 \text{ với mọi } m \Rightarrow 16m^2 + 33 \geq 33 \text{ mọi } m$$

$$\text{Vậy GTNN của } A = 33 \Leftrightarrow m = 0$$

$$3/ \begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m + 1) & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m - 4) & (2) \end{cases}$$

Ta có $x_1 + x_2 = -4m - 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + 1 = -4m \Rightarrow m = \frac{x_1 + x_2 + 1}{-4}$ Thay vào (2) ta được

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \left(\frac{x_1 + x_2 + 1}{-4} - 4 \right) \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{x_1 + x_2 + 1}{-2} - 8$$

$$\Leftrightarrow -2x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 16$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 17 = 0$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m là: $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 17 = 0$

Bài 8. $x^2 - 2(m+1)x + 2m+1 = 0$

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 - (2m+1)$$

$$\Delta' = m^2$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Áp dụng định lí Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ x_1x_2 = 2m+1 \end{cases}$$

Theo đề ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4(m^2 + 2m + 1) - 2(2m + 1) = 5 \Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 3 = 0$$

$$\text{Suy ra } m = \frac{-3 + \sqrt{21}}{4} \text{ hoặc } m = \frac{-3 - \sqrt{21}}{4}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{-3 + \sqrt{21}}{4} \text{ hoặc } m = \frac{-3 - \sqrt{21}}{4} \text{ thì phương trình đã cho có hai nghiệm}$$

phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$

Bài 9. Cho phương trình $x^4 - 2x^2 + m - 2 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = -1$

$$\text{Thay } m = -1 \text{ vào phương trình, ta có: } x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Ta có $a - b + c = 1 + 2 - 3 = 0$

Do đó, phương trình có nghiệm $t_1 = -1$ (loại) và $t_2 = 3$.

$$t = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{\pm\sqrt{3}\}$

b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình trở thành $t^2 - 2t + m - 2 = 0$. (1)

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 2 > 0 \\ 2 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3$$

Vậy $2 < m < 3$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 10. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)|x| + m^2 - 1 = 0$

Đặt $t = |x| (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m^2 - 1 = 0$

(1)

Ứng với một nghiệm t dương của phương trình (1) thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt. Do đó để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t = 0$.

$$\text{Suy ra } m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Khi $m = 1$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t = 0$

$$\Leftrightarrow t(t - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad (\text{loại vì có 3 nghiệm})$$

Khi $m = -1$, phương trình (1) trở thành: $t^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{nhận})$$

Vậy $m = -1$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

DẠNG 6:

Bài 1:

1. Chứng minh $\widehat{OKM} = \widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$

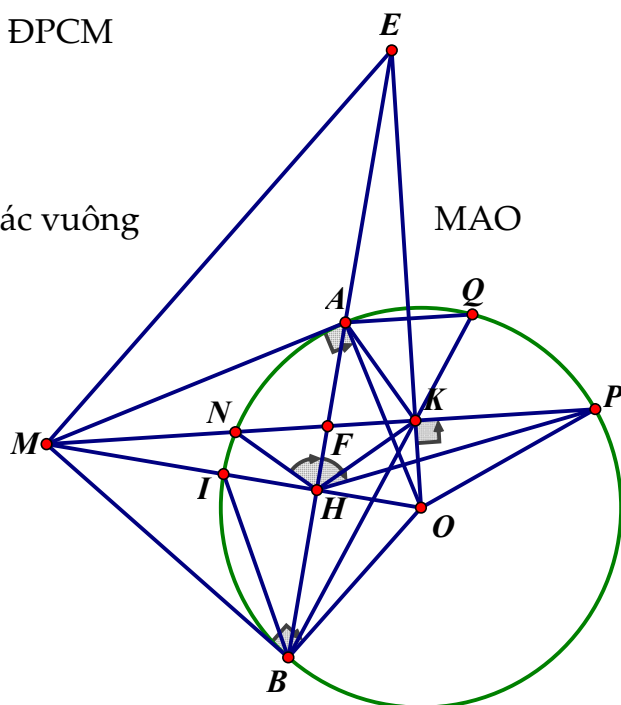
2. Dùng kết quả câu 1, tứ giác MAKB nội tiếp chú ý $MA = MB \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{BKM}$.

3. Chứng minh được: $\widehat{AOB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKB} \Rightarrow \text{ĐPCM}$

4. Chứng minh được:

$OM \perp AB$, dùng hệ thức lượng cho tam giác vuông

$$\Rightarrow MH \cdot MO = MA^2.$$



Chú ý:

$$\triangle MAN \sim \triangle MPA (g - g) \Rightarrow MN.MP = MA^2$$

5. Từ kết quả câu 4 :

$$\Rightarrow \triangle MNH \sim \triangle MOP (c - g - c).$$

$$\Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{MOP}$$

Tổng quát: Trên tia Mx lấy hai điểm A, B sao cho MA < MB. Trên tia MY lấy hai điểm N, P sao cho MN < MP. Khi đó ABPN là tứ giác nội tiếp

$$\Leftrightarrow MA.MB = MN.MP.$$

6. Vì AB = 2AH nên:

$$AB^2 = 4.HE.HF \Leftrightarrow AH^2 = HE.HF. \text{ Dùng hệ thức lượng cho tam giác MAO}$$

$$\Rightarrow AH^2 = HM.HO. \text{ Chứng minh được:}$$

$$\triangle HMF \sim \triangle HEO (g - g) \Rightarrow HE.HF = HM.HO$$

7. Chứng minh được MEKH là tứ giác nội tiếp, dùng kết quả tổng quát ở câu 5 ta có:

$OK.OE = OH.OM = OA^2 = R^2$ không đổi. Từ

$$OK.OE = R^2 = ON^2 = OP^2 \Rightarrow \widehat{ENO} = 90^\circ.$$

8. Vì MO là trung trực của AB nên IA = IB. $\widehat{IAM} = \widehat{IAB}$ suy ra AI là phân giác $\widehat{MAB}$, chú ý MI là phân giác $\widehat{AMB} \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

9. Từ câu 2 KF là phân giác góc $\widehat{AKB}$, chú ý $KE \perp KF$ nên KE là phân giác góc ngoài tại đỉnh K. Dùng tính chất đường phân giác với $AKB \Rightarrow AE.BF = AF.BE$.

10. Nhận xét: P, Q thay đổi nên $\triangle MQP$ có độ dài cả ba cạnh đều thay đổi gây khó khăn do đó cần đưa về tam giác chứa yếu tố cố định hơn.

Từ kết quả câu 3

$$\Rightarrow AQ // MP \Rightarrow S_{QMP} = S_{AMP}.$$

Kẻ $PJ \perp MA$ ta có

$$S_{AMP} = \frac{1}{2} AM.PJ$$

Do AM không đổi

$$\Rightarrow S_{AMP_{\max}} \Leftrightarrow PJ_{\max}$$

$$PJ \leq PA \leq P'A \Leftrightarrow P \equiv P' \text{ (P' đối xứng với A qua O)}$$

$$S_{MQP_{\max}} \Leftrightarrow P \equiv P'$$

11. Gọi S là trung điểm OM, từ G kẻ GL//KS. Vì AS cố định và: $\frac{AL}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow L$ cố định

$$\text{Lại có: } LG = \frac{2}{3} SK = \frac{1}{3} OM \text{ (Không đổi)}$$

Bởi vậy G luôn chạy trên đường tròn $\left(L; \frac{1}{3}OM\right)$ cố định.

Do $OK.OE$ không đổi nên E thuộc đường OK cố định trên đó E cách O cố định một đoạn $OE = \frac{R^2}{OK}$ không đổi. Vậy E là điểm cố định mà AB luôn đi qua.

12. Từ $MO = 2R$ tính được $\widehat{MOA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$.

Diện tích hình quạt cần tính là $S = \frac{\pi R^2}{3}$.

Bài 2

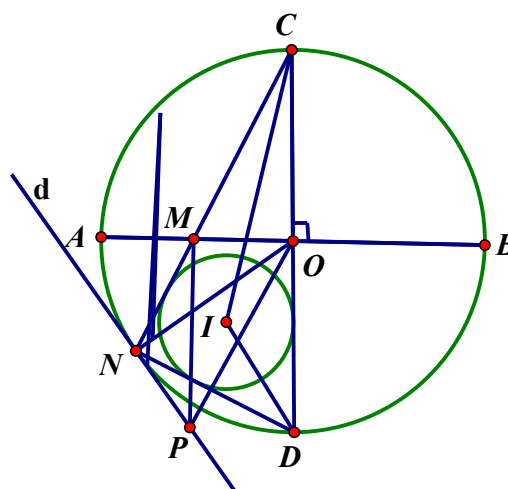
a. C/m: tứ giác OMNP nội tiếp

Ta có: $MP \perp AB \Rightarrow \widehat{OMP} = 90^\circ$

Ta có: $ON \perp CP \Rightarrow \widehat{ONP} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OMP} = \widehat{ONP}$

$\Rightarrow$ Tứ giác OMNP nội tiếp (DHNB)



b. C/m: Tứ giác CMPO là hình bình hành

hình

Ta có: $\left. \begin{array}{l} CO \perp AB \\ MP \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow CO \parallel MP \quad (1)$

Ta có: $\widehat{OCM} = \widehat{ONM}$ ($\triangle OCN$ cân tại O)

$$\widehat{OPM} = \widehat{ONM} \quad (\text{cùng chắn cung OM})$$

$$\widehat{OPM} = \widehat{DOP} \quad (OD // PM)$$

$$\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{DOP}$$

Mà chúng là hai góc đồng vị

$$\Rightarrow CM // OP \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra tứ giác CMPO là hình bình hành.

c. C/m : CM . CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

+) Xét $\triangle COM$ và $\triangle CND$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{OCM} : \text{chung} \\ \widehat{COM} = \widehat{CND} (=90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle COM \sim \triangle CND \quad (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CO}{CN} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow CM \cdot CN = OC \cdot CD = 3R^2$$

$$\Rightarrow CM \cdot CN \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow CM \cdot CN \text{ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M}$$

d. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì tâm đường tròn nội tiếp tam giác CND di chuyển trên một cung tròn cố định nào?

+) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CND$

$$\Rightarrow CI \text{ là tia phân giác của } \widehat{OCN} \Rightarrow \widehat{DCI} = \frac{1}{2} \widehat{DCN}$$

$$DI \text{ là tia phân giác của } \widehat{CDN} \Rightarrow \widehat{CDI} = \frac{1}{2} \widehat{CDN}$$

$\Rightarrow I$ nằm trên cung tròn chứa góc 135° dựng trên CD .

Page 67

$$\Rightarrow CO \perp NP \text{ hay } \Rightarrow AC \perp NP$$

$$\text{Mà } AC \perp AD$$

$$\Rightarrow OA \perp NP$$

$\Rightarrow$ Tứ giác APND là hình thang.

c. C/m : CM . CD không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

+) Xét $\triangle CMB$ và $\triangle CAD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ACD} : \text{chung} \\ \widehat{CMB} = \widehat{CAD} (=90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CMB \sim \triangle CAD \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow CM \cdot CD = CA \cdot CB$$

Mà A, B, C cố định

$\Rightarrow CA \cdot CB$ không đổi

$\Rightarrow CM \cdot CD$ không đổi

$\Rightarrow CM \cdot CD$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

d. C/m: Trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

Gọi I là trung điểm của AC $\Rightarrow$ Điểm I cố định và $\frac{IG}{IM} = \frac{1}{3}$

Kẻ GJ // MB $\Rightarrow \frac{IG}{IM} = \frac{IJ}{IB} = \frac{1}{3}$ (định lý Talet) $\Rightarrow$ Điểm J cố định

Kẻ GK // MC $\Rightarrow \frac{IG}{IM} = \frac{IK}{IC} = \frac{1}{3}$ (định lý Talet) $\Rightarrow$ Điểm K cố định

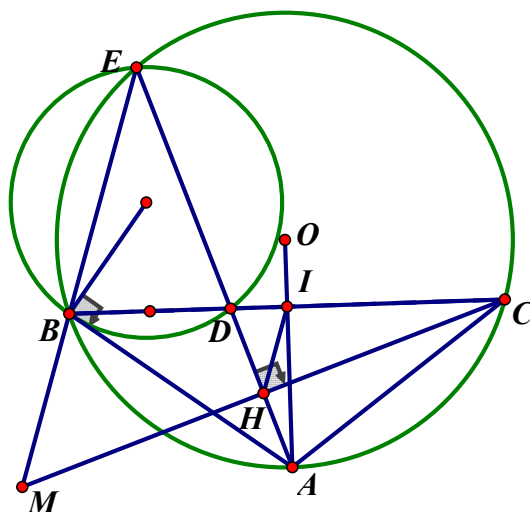
$$\Rightarrow \frac{IJ}{IB} = \frac{IK}{IC} = \frac{IJ+IK}{IB+IC} = \frac{JK}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow JK = \frac{1}{3}BC$$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} GJ // MB \\ GK // MC \\ MB \perp MC \end{array} \right\} \Rightarrow GJ \perp GK \Rightarrow \widehat{JGK} = 90^\circ$$

Vậy khi M di động trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên đường tròn đường kính JK cố định.

Bài 4:



a. A là điểm chính giữa $\widehat{BC}$

I là trung điểm BC $\Rightarrow OA \perp BC$ tại I

$$\Rightarrow \widehat{AIC} = 90^\circ$$

$$CH \perp AE \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác AIHC nội tiếp

$\Rightarrow A, I, H, C$ cùng thuộc một đường tròn

b. Xét $\triangle ACD$ và $\triangle AEC$ có $\widehat{A}$ chung

$\widehat{ACD} = \widehat{AEC}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AEC$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD \cdot AE = AC^2 = \text{const}$$

c. Có $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ABC}$

Suy ra AB tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle BED$

d. Có $\widehat{BEA} = \widehat{CEA}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow EA$ là phân giác $\widehat{CEM}$, mà $EA \perp MC \Rightarrow \triangle EMC$ cân tại E

$\Rightarrow EA$ là trung trực MC $\Rightarrow AM = AC$

$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle ACH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$S_{\triangle MAC} = 2S_{\triangle AHC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AH \cdot HC \leq \frac{1}{2} (AH^2 + HC^2)$$

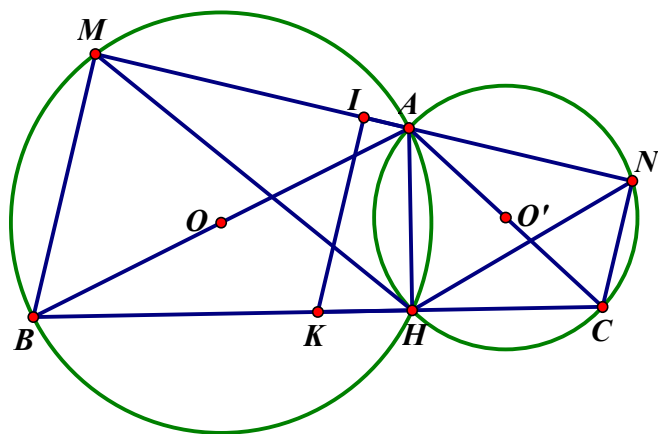
$$S_{\triangle MAC} \leq \frac{1}{2} AC^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $HA = HC \Rightarrow \triangle HAC$ vuông cân tại H

$\Rightarrow \widehat{CAH} = 45^\circ$ hay $\widehat{CAE} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{COE} = 90^\circ \Rightarrow E \text{ nằm trên } (O) \text{ sao cho số đo } \widehat{CE} = 90^\circ$$

Bài 5.



CHỨNG MINH

1) Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{HBC} = \widehat{BHA} + \widehat{AHC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Vậy B, H, C thẳng hàng.

2) Nếu $MN \perp AH$ thì HM, HN lần lượt là các đường kính nên hiển nhiên ta có đpcm.

Ngược lại, không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{HAN}$ nhọn, ta có $\widehat{MBH} = \widehat{HAN}$ (cùng bù với $\widehat{HAM}$)

$\widehat{MOH}$ là góc ở tâm chắn $\widehat{HM}$, $\widehat{MBH}$ là góc nhọn chắn cung $\widehat{HM}$ nên

$$\widehat{MBH} = \frac{1}{2} \widehat{MOH}.$$

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{HAN} = \frac{1}{2} \widehat{HO'N}$

Suy ra hai tam giác cân MOH và $HO'N$ đồng dạng (c-g-c)

$$\Rightarrow \frac{MH}{HN} = \frac{MO}{NO'} = \frac{R}{R'} = \text{const}$$

3) Ta có $\widehat{BMA} = \widehat{CNA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow tg\ MNCB$ là hình thang vuông.

KI là đường trung bình của hình thang $MNCB$

$\Rightarrow KI // NC \Rightarrow \widehat{KIA} + \widehat{KNC} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

Mặt khác $\widehat{AHK} = \widehat{ANC}$ (cùng bù với $\widehat{AHC}$)

Suy ra $\widehat{AIK} + \widehat{AHK} = 180^\circ$, mà hai góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AIKH$ nội tiếp. Vậy 4 điểm A, H, K, I cùng thuộc một đường tròn.

4) Xét $\triangle HMN$ và $\triangle ABC$

$\widehat{NMH} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AH}$ của (O))

$\widehat{MNH} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AH}$ của (O'))

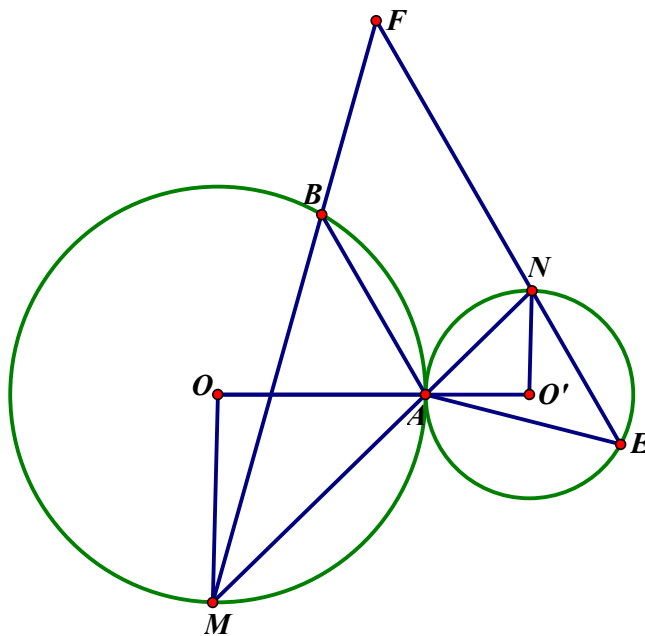
Suy ra $\triangle HMN \sim \triangle ABC$ (g-g)

$$\frac{S_{\triangle HMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{HM}{AB} \Rightarrow S_{\triangle HMN} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{HM}{AB}$$

Mà A, B, C cố định nên $S_{\triangle HMN} \max \Leftrightarrow HM \max \Leftrightarrow HM$ là đường kính của (O)

Khi đó $\widehat{MAH} = 90^\circ$, đường thẳng $d // BC$ là đường thẳng cần tìm.

Bài 6. CHỨNG MINH



3) $AB // EF$ (gt) $\Rightarrow$ tg $ABFE$ là hình thang (4)

$$\widehat{BFE} = \widehat{MBA} \text{ (đồng vị)} \quad (5)$$

$$\widehat{MBA} = \frac{1}{2} \widehat{AOM} \text{ (tính chất góc nội tiếp) (6)}$$

$$\widehat{AEF} \equiv \widehat{AEN} = \frac{1}{2} \widehat{AO'N} \quad (\text{tính chất góc nội tiếp}) \quad (7)$$

$$\widehat{AOM} = \widehat{AO'N} \text{ (do } \Delta AOM \simeq \Delta AO'N \text{)} \quad (8)$$

Từ (5)(6)(7)(8) suy ra $\widehat{BFE} = \widehat{AEF}$ (9)

Từ (4) và (9) suy ra tứ giác $ABFE$ là hình thang cân.

4) Kẻ đường cao AH của hình thang, ta có

$$S_{ABFN} = \frac{(AB + FN).AH}{2} = \frac{\left(R + \frac{3}{2}R\right)AH}{2} = \frac{5}{4}R.AH$$

(10)

Ке $MK \perp AB \equiv K$.

$$\widehat{MAK} = \widehat{ANH} \text{ (đồng vị)}$$

$$\text{Suy ra } \Delta AKM \sim \Delta NHA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{MK}{AH} = \frac{MA}{NA} = \frac{R}{R'} = 2 \quad (11)$$

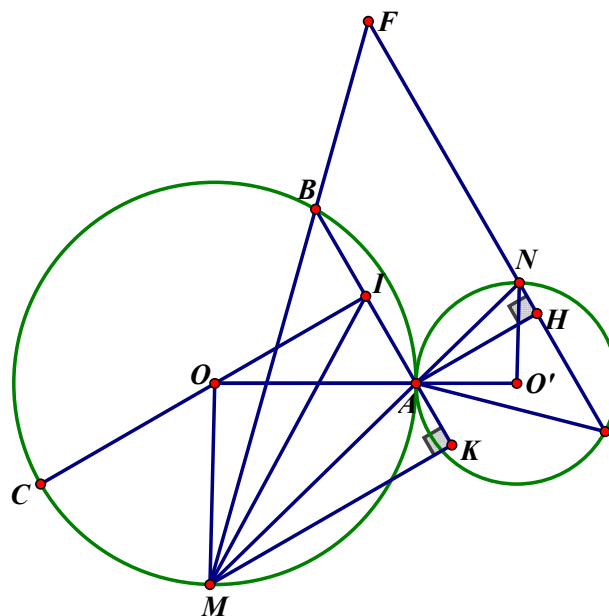
Từ (10)(11) suy ra $S_{ABFN} = \frac{5}{8} R.MK$

Vậy $S_{ABFN} \max \Leftrightarrow MK \max$

Gọi I là trung điểm của AB và C là điểm thỏa mãn

$CI \perp AB, C \in (O) \Rightarrow C$ là trung điểm của cung lớn

$\overrightarrow{AB}$ nên cố định.



Vậy diện tích quạt dưới hạn bởi $OB, OC, \widehat{BC}$ nhỏ : $S = \frac{\pi R^2 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6} (dvd t)$

4) Gọi F là điểm đối xứng của A qua $CD \Rightarrow F$ cố định do A, CD cố định.

$\Rightarrow KAF$ cân tại K do KM là trung trực của AF (theo cách dựng F)

$$\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{KFM} \quad (3)$$

Tứ giác $AEHM$ nội tiếp do hai góc đối diện E và M vuông

$$\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{MHB} \quad (4)$$

$$\widehat{MHB} + \widehat{KHB} = 180^\circ \quad (5)$$

$$\text{Từ (3)(4)(5)} \Rightarrow \widehat{KFM} + \widehat{KHB} = 180^\circ$$

$\Rightarrow KHBF$ nội tiếp

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK

$\Rightarrow$ Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK thuộc đường trung trực của BF cố định.

Bài 8. CHỨNG MINH

8) Ta có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HB \perp AE$

Mặt khác ta lại có H là điểm chính giữa cung AM nên $\widehat{ABH} = \widehat{HBM}$

Xét tam giác ABE có BH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $\triangle BAE$ cân tại B .

9) Do $N \in (B, BA) \Rightarrow BA = BN \Rightarrow \triangle ABN$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{INB} = \widehat{MAB}$ (1)

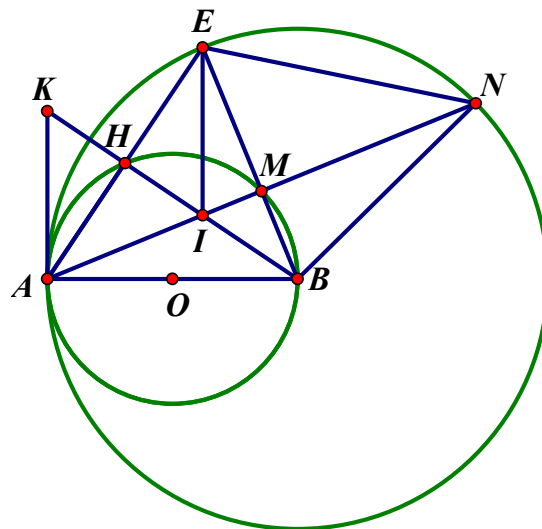
AM, AH lần lượt là hai đường cao

trong tam giác FAB và cắt nhau tại I

nên I là trực tâm của tam giác FAB

$\Rightarrow KI \perp AB \Rightarrow \widehat{IEB} = \widehat{MAB}$ (2) (cùng phụ với $\widehat{MBA}$)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{INB} = \widehat{IEB}$ mà hai góc cùng nhìn cạnh IB nên tứ giác $NEIB$ nội tiếp.



10) Khi

$\widehat{MAK} = 90^\circ \Rightarrow MK \parallel AB \Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{KBA}$ (so le tr
mà $\widehat{MBK} = \widehat{KBA}$ (cmt) nên

$$\widehat{MBK} = \widehat{MKB} \Rightarrow \Delta MKB \text{ cân tại } M$$

$$\Rightarrow MK = MB \quad (3)$$

Kẻ $MJ \perp AB \equiv J \Rightarrow KMJA$ hình chữ nhật

$$\Rightarrow KM = JA \quad (4)$$

Từ (3)(4) suy ra $MB = JA$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MAB

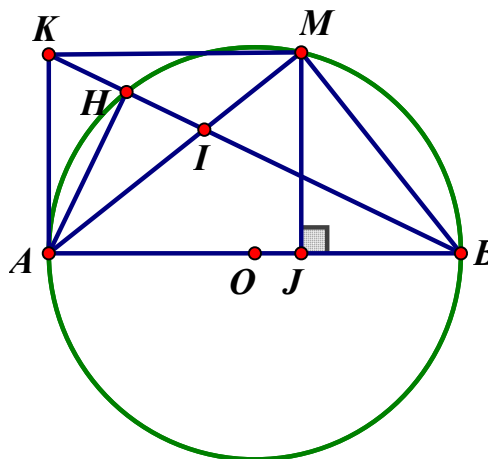
đường cao MJ :

$$MB^2 = JB.AB = (AB - JA)AB = 4R^2 - 2R.MB$$

$$\Rightarrow MB^2 + 2R.MB - 4R^2 = 0 \Rightarrow (MB + R)^2 = 5R^2 \Rightarrow MB = (\sqrt{5}$$

Vậy điểm M cần tìm là giao của $(O; R)$ và

$$\left(B; (\sqrt{5}-1)R\right).$$



BÀI 9.

a. C/m: tứ giác MNEF nội tiếp

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AB \\ MN \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow CD \parallel MN$$

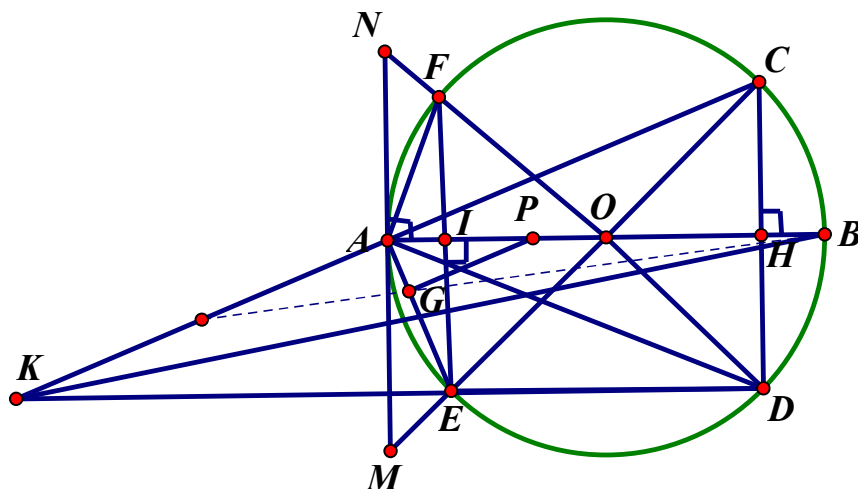
$$\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{CDN} \text{ (2 góc slt)}$$

$$\text{Mà: } \widehat{CDN} = \widehat{CFE} \text{ (cùng chắn } \widehat{CE})$$

$$\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{CFE}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNEF nội tiếp

(DHNB)



b. C/m: ME.MC = NF.ND

+) Xét $\triangle MAE$ và $\triangle MCA$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AME} : \text{chung} \\ \widehat{MAE} = \widehat{MCA} \text{ (cùng chắn } \widehat{AE}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAE = \triangle MCA (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{ME}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MC \cdot ME \quad (1)$$

+) Xét $\triangle NAF$ và $\triangle NDA$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ANF} : \text{chung} \\ \widehat{NAF} = \widehat{NDA} \text{ (cùng chắn } \widehat{AF}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle NAF = \triangle NDA (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{NA}{ND} = \frac{NF}{NA}$$

$$\Rightarrow NA^2 = ND.NF \quad (2)$$

$$+) \text{ Ta có: } MN \parallel CD \text{ (cmt)} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{CDN} = \widehat{MND} \\ \widehat{MCD} = \widehat{NMC} \end{cases}$$

Mà $\widehat{CDN} = \widehat{MCD}$ (vì $\triangle OCD$ cân tại O)

$$\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{CMN}$$

$$\Rightarrow \triangle OMN \text{ cân tại O}$$

Mà $OA \perp NM$

Suy ra: A là trung điểm của MN

$$\Rightarrow AM = AN \quad (3)$$

$$+) \text{ Từ (1), (2), (3) suy ra: } ME.MC = NF.ND$$

c. Tìm vị trí của điểm H để tứ giác AEOF là hình thoi.

+) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{FEC} = \widehat{MNF} \\ \widehat{MNF} = \widehat{NME} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FEC} = \widehat{NME}$$

$$\Rightarrow EF \parallel MN$$

Mà $OA \perp NM$

$$\Rightarrow OA \perp EF \text{ tại I}$$

$$\Rightarrow IE = IF$$

Tứ giác AEOF có $OA \perp EF$ tại I và $IE = IF$ (cmt)

Để tứ giác AEOF là hình thoi thì I là trung điểm của OA

+) c/m: $\triangle OIE = \triangle OHC$ (ch-gn) $\Rightarrow OI = OH$

$\Rightarrow$ Khi I là trung điểm của OA thì H là trung điểm của OB

Vậy để tứ giác AEOF là hình thoi thì H là trung điểm của OB.

d. C/m: Khi H chuyển động trên đoạn OB thì G thuộc một đường trong cố định.

+) Từ G kẻ đường thẳng song song với AC và cắt AB tại P

Xét $\triangle OKA$ có $GP \parallel AK$ (theo cách vẽ)

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{OG}{OK} = \frac{OP}{OA} \\ \text{Ma } \frac{OG}{OK} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OP}{OA} = \frac{1}{3}$$

Suy ra điểm P cố định

+) Ta có: $\left. \begin{array}{l} GP \parallel AK \\ GA \perp GK \end{array} \right\} \Rightarrow GP \perp GA \Rightarrow \widehat{AGP} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ G thuộc đường tròn đường kính AP khi H chuyển động trên đoạn OB.

Bài 10.

a. C/m: tứ giác BF'E'C nội tiếp

+) Ta có: F' đối xứng với H qua AB

$\Rightarrow$ AB là đường trung trực của F'H

$\Rightarrow BF' = BH$

$\Rightarrow \triangle BHF'$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BF'H} = \widehat{BHF'}$ (1)

+) Ta có: E' đối xứng với H qua AC

$\Rightarrow$ AC là đường trung trực của E'H

$\Rightarrow CE' = CH$

$\Rightarrow \triangle CHE'$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{CE'H} = \widehat{CHE'}$ (2)

+) Ta có : $\widehat{BHF'} = \widehat{CHE'}$ (2 góc đối đỉnh)

(3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BF'H} = \widehat{CE'H}$

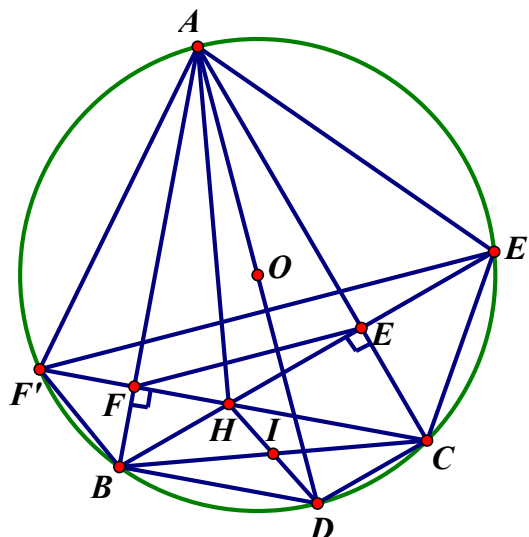
Mà E', F' là 2 đỉnh liền kề của tứ giác

BCE'F'

$\Rightarrow$ Tứ giác BCE'F' nội tiếp (dnhb)

b. C/m: A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn

Ta có: $\widehat{AFH} = \widehat{AEF} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp (dnhb)



$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{FHE} = 180^\circ \\ \text{Mà } \widehat{BHF'} + \widehat{FHE} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{BHF'}$$

Lại có: $\widehat{BFH} = \widehat{BHF'}$

$$\Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{BF'H}$$

Mà A, F' là 2 đỉnh liền kề của tứ giác ABCF'

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCF' nội tiếp (dnhb)

$\Rightarrow$ A, C, B, F' thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCF'$ (4)

+) Ta có: Tứ giác BCE'F' nội tiếp

$\Rightarrow$ B, C, E', F' thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCF'$ (5)

Từ (4), (5) suy ra A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn

c. C/m: $OA \perp EF$

+) Ta có: F' đối xứng với H qua AB

$\Rightarrow$ AB là đường trung trực của F'H

$$\Rightarrow AF' = AH \quad (6)$$

+) Ta có: E' đối xứng với H qua AC

$\Rightarrow$ AC là đường trung trực của E'H

$$\Rightarrow AE' = AH \quad (7)$$

Từ (6), (7) suy ra $AE' = AF'$

$\Rightarrow A \in$ đường trung trực của E'F' (8)

+) Ta có: $OE' = OF' = R$

$\Rightarrow O \in$ đường trung trực của $E'F'$ (9)

Từ (8), (9) suy ra OA là đường trung trực của $E'F'$

$\Rightarrow OA \perp E'F'$

+) C/M: Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EFC}$

Mà $\widehat{EBC} = \widehat{CF'E'}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CE')

$\Rightarrow \widehat{CF'E'} = \widehat{EFC}$

$\Rightarrow EF // E'F'$

Mà $OA \perp E'F'$

$\Rightarrow OA \perp EF$

d. C/m: Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi

Xét $\left(O; \frac{AD}{2} \right)$ có: $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow DC \perp AC$
 $\left. \begin{array}{l} \text{Ma } BH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow DC // BH$ (10)

$\Rightarrow \widehat{CDH} = \widehat{F'HB}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{Ma } \widehat{F'HB} = \widehat{BF'H} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{CDH} = \widehat{BF'H}$

$\Rightarrow \widehat{F'D} = \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{F'B} = \widehat{CD} \Rightarrow F'B = CD$ (11)

Từ (10), (11) suy ra tứ giác BHCD là hình bình hành

Gọi I là trung điểm của BC

$\Rightarrow I$ là trung điểm của HD

+) Ta có: O là trung điểm của AD

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}AH \text{ (t/c đường trung bình của } \triangle AHD \text{)}$$

$$\Rightarrow AH = 2OI$$

Do BC cố định $\Rightarrow OI$ không đổi $\Rightarrow AH$ không đổi

+) Ta có: tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính OH (cmt)

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi

Vậy khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.