

MÔN TOÁN LỚP 9

Thời gian làm bài : 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho các biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 81$
- Rút gọn biểu thức $P = B : A$
- So sánh P với $\frac{1}{2}$

Câu 2 (2,5 điểm).

1. Giải bài toán bằng cách phương trình hoặc hệ phương trình:

Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 3 và tổng các bình phương của hai chữ số là 45.

2. Một hộp sữa hình trụ có thể tích là 16π (cm³). Biết rằng đường kính đáy và độ dài trục của hình trụ bằng nhau. Tính diện tích vật liệu cần dùng để làm vỏ hộp sữa, bỏ qua diện tích phần ghép nối.

Câu 3 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2y-1} = 0 \\ 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{2y-1} = 3 \end{cases}$$

2. Cho phương trình $x^2 - (2m - 1)x - 5 = 0$ (1) (m là tham số)

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm giá trị của m để phương trình (1) hai nghiệm nguyên.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho (O) với dây AB cố định (AB không qua O). Đường kính CD vuông góc với AB tại H (C thuộc cung lớn AB). Điểm M di chuyển trên cung nhỏ AC ($M \neq A$ và $M \neq C$). Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N. Nối MD cắt AB tại E.

- Chứng minh tứ giác CMEH nội tiếp.
- Chứng minh $NM.NC = NA.NB$.
- Lấy điểm P đối xứng với A qua O. Gọi I là trung điểm của MC. Kẻ IK vuông góc với đường thẳng AM tại K. Chứng minh $IK \parallel MP$ và điểm K thuộc một đường tròn cố định.

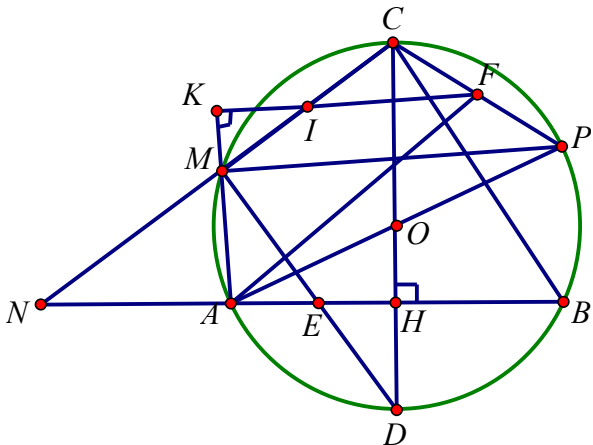
Câu 5 (0,5 điểm). Cho hai số thực a, b thỏa mãn: $(a + \sqrt{a^2 + 9})(b + \sqrt{b^2 + 9}) = 9$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2a^4 - b^4 + 6ab + 8a^2 - 10a - 2b + 2026$.

.....Hết

CÂU		ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1	a (0,5đ)	Câu 1 (2,0 điểm). Thay $x = 81$ (tmđk) vào biểu thức A, ta được $A = \frac{2}{\sqrt{81+1}} = \frac{2}{9+1} = \frac{1}{5}$ Vậy $x = 81$ thì $A = \frac{1}{5}$ Lưu ý: Nếu HS thay số đúng và tính sai chỉ được 0,25 điểm.	0,5
	b (1đ)	$B = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$	
		$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$B = \frac{1}{\sqrt{x}}$	0,25
		$P = \frac{1}{\sqrt{x}} \div \frac{2}{\sqrt{x}+1}$	
		$P = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2}$	0,25
		$P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$	0,25
	c (0,5đ)	Ta có $P - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	0,25
		Ta có $x > 0$ nên $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow P - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow P > \frac{1}{2}$	0,25
2	a (2đ)	Gọi số cần tìm là $\overline{xy}$ ($x \in \mathbb{N}^*$, $x \leq 9$; $y \in \mathbb{N}$, $x \leq 9$)	0,25
		Vì chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 3, ta có $x - y = 3 \Leftrightarrow x = y + 3$ (1)	0,25
		Vì tổng các bình phương của hai chữ số là 45, ta có $x^2 + y^2 = 45$ (2)	0,25
		Thay (1) vào (2), ta có phương trình $(y+3)^2 + y^2 = 45$	0,25
		$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y^2 + 3y - 18 = 0$	0,25
		Giải phương trình ta được $y = -6$ (loại) hoặc $y = 3$ (chọn)	0,25
		Với $y = 3$, ta có $x = 3 + 3 = 6$ (thỏa mãn)	0,25
		Vậy số cần tìm là 63	0,25
	b (0,5đ)	Thể tích của hộp sữa $V = \pi r^2 \cdot h$ Mà $h = 2r \Rightarrow V = 2\pi r^3 \Rightarrow 16\pi = 2\pi r^3 \Rightarrow r = 2\text{cm} \Rightarrow h = 4\text{cm}$	0,25

		Diện tích vật liệu để tạo nên vỏ hộp sữa là $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_d = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = \dots = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$	0,25																				
3	1 (1đ)	$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2y-1} = 0 \\ 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{2y-1} = 3 \end{cases} \quad (1) \text{ (ĐKXD: } x \geq 1, y \neq \frac{1}{2} \text{)}$	0,25																				
		Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a(a \geq 0) \\ \frac{1}{2y-1} = b(b \neq 0) \end{cases}$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \quad (2)$																					
		Giải hệ phương trình (2), ta được $\begin{cases} a = 1(tm) \\ b = 1(tm) \end{cases}$	0,25																				
		Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \frac{1}{2y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ y = 1(tm) \end{cases}$	0,25																				
		Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) = (2; 1)	0,25																				
	2a (0,5đ)	Cho phương trình $x^2 - (2m - 1)x - 5 = 0 \text{ (1) (m là tham số)}$ Ta có $\Delta = \dots = (2m - 1)^2 + 20$	0,25																				
		Vì $(2m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall m \Rightarrow (2m - 1)^2 + 20 > 0$ với $\forall m$ $\Rightarrow \Delta > 0$ với $\forall m \Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt	0,25																				
		Lưu ý: HS nhận xét dấu của a và c để chứng minh GV cho điểm tương đương.																					
		2b (0,5đ)	Theo hệ thức Vi – ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1.x_2 = -5 \end{cases}$																				
	Ta có $\begin{cases} x_1.x_2 = -5 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 \in \{\pm 1; \pm 5\}$		0,25																				
		Lập bảng giá trị <table><tr><td>x_1</td><td>- 5</td><td>- 1</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>x_2</td><td>1</td><td>5</td><td>- 5</td><td>- 1</td></tr><tr><td>$x_1 + x_2 = 2m - 1$</td><td>- 4</td><td>4</td><td>- 4</td><td>4</td></tr><tr><td>m</td><td>- 1,5</td><td>2,5</td><td>- 1,5</td><td>2,5</td></tr></table> Vậy $m \in \{- 1,5; 2,5\}$ thỏa mãn đề bài.	x_1	- 5	- 1	1	5	x_2	1	5	- 5	- 1	$x_1 + x_2 = 2m - 1$	- 4	4	- 4	4	m	- 1,5	2,5	- 1,5	2,5	0,25
x_1	- 5	- 1	1	5																			
x_2	1	5	- 5	- 1																			
$x_1 + x_2 = 2m - 1$	- 4	4	- 4	4																			
m	- 1,5	2,5	- 1,5	2,5																			
		Hình vẽ đúng đến câu a	0,25																				

4		
a (0,75đ)	Chứng minh tứ giác CMEH nội tiếp. - Chứng minh $\widehat{CME} = 90^\circ$ - Chứng minh tứ giác CMEH nội tiếp	0,25 0,5
b (1đ)	Chứng minh NM. NC = NA. NB - Chứng minh tứ giác AMCB nội tiếp $\Rightarrow$ Chứng minh $\widehat{NMA} = \widehat{NBC}$ - Chứng minh $\triangle NMA \sim \triangle NBC$ (gg) - Chứng minh NM. NC = NA. NB (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25
c (1đ)	Chứng minh IK // MP và điểm K thuộc một đường tròn cố định - Chứng minh AP là đường kính của (O) - Chứng minh $MP \perp AM$ - Chứng minh $IK \parallel MP$ Gọi IK cắt CP tại F. Chứng minh F là trung điểm của CP Vì A, C cố định $\Rightarrow$ P, F cố định Mà $\widehat{AKF} = 90^\circ \Rightarrow$ K thuộc đường tròn đường kính AF cố định.	0,25 0,25 0,25 0,25
5	0,5đ Ta có $(a + \sqrt{a^2 + 9})(b + \sqrt{b^2 + 9}) = 9$ (đề bài) Mà $(a + \sqrt{a^2 + 9})(\sqrt{a^2 + 9} - a) = 9$ và $(\sqrt{b^2 + 9} - b)(b + \sqrt{b^2 + 9}) = 9$ $\Rightarrow \begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{b^2 + 9} - b \\ b + \sqrt{b^2 + 9} = \sqrt{a^2 + 9} - a \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow a = -b$ $\Rightarrow M = 2a^4 - a^4 - 6a^2 + 8a^2 - 10a + 2a + 2026$ $\Rightarrow M = a^4 + 2a^2 - 8a + 2026$ $\Rightarrow M = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 - 8a + 4 + 2021$ $\Rightarrow M = (a^2 - 1)^2 + (2a - 2)^2 + 2021$ $\Rightarrow M \geq 2021$ Dấu “=” xảy ra khi $a = 1, b = -1$ Vậy MinM = 2021 khi $a = 1, b = -1$	0,25

***) Lưu ý: Nếu học sinh giải các bài theo cách khác đúng vẫn cho điểm tương đương.**