

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = (x^7 + 4x^2 - 4x - 2)^{2023}$ biết rằng $x = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$.

b) Cho biểu thức

$$B = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (\text{với } 0 < x \neq 1).$$

Rút gọn biểu thức B và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B .

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Giải phương trình: $(3x + 2023)^3 + (3x - 2026)^3 = (6x - 3)^3$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{x+9} + 2023\sqrt{x+6} = 2023 + \sqrt{(x+9)(x+6)}$.

Câu 3 (2,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + 1}$.

Câu 4 (4,0 điểm). Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , lấy điểm M bất kỳ trên cạnh BC (M khác B và C). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại H , kéo dài BH cắt đường thẳng DC tại K .

a) Chứng minh rằng KM vuông góc với DB và $KC \cdot KD = KH \cdot KB$.

b) Ký hiệu S_{ABM}, S_{DCM} lần lượt là diện tích của các tam giác ABM và DCM . Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để $S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a .

Câu 5 (2,0 điểm). Cho tam giác vuông tại A có $AB < AC$ và AM là trung tuyến.

Đặt $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh rằng

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin \beta = 1.$$

Câu 6 (2,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 4 - abc$.

Chứng minh rằng $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3$.

===Hết===

Lưu ý: Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu. Giám thị không được giải thích gì thêm.

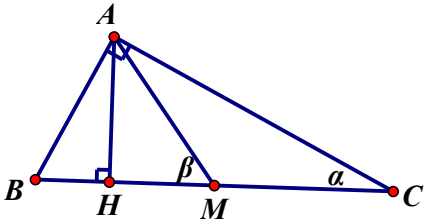
Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm
1 (5,0 điểm)	a) (1.5 điểm) . Ta có $x = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}$	0.5
	$= \sqrt{3 - \sqrt{3} - 1 } = \sqrt{\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1} = 1.$ (Nếu thí sinh quên ghi “dấu giá trị tuyệt đối” mà kết quả đúng thì giám khảo tha cho các em ở bước này)	0.5
	Thay $x = 1$ vào biểu thức A ta được $A = (1^7 + 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 2)^{2023} = (-1)^{2023} = -1.$	0.5
	b) (3.5 điểm) . Ta có $B = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $= \frac{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}[(\sqrt{x})^3-1^3]}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$ (Phân tích đúng cho tử của mỗi phân thức được 0,5 điểm vì đây là bước quan trọng nhất để rút gọn biểu thức B).	1.5
	$= 2(\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1)$	0.5
	$= x - \sqrt{x} + 1$	0.5
	$B = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x > 0, x \neq 1.$	0.5
	Vậy $\min B = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$	0.5

2 (5.0 điểm)	a) (2.5 điểm) . Đặt $\begin{cases} a = 3x + 2023 \\ b = 3x - 2026 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6x - 3$. Phương trình đã cho trở thành $a^3 + b^3 = (a + b)^3$	0.5
	$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Leftrightarrow 3ab(a + b) = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a + b = 0$.	0.5
	Với $a = 0$ thì $3x + 2023 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2023}{3}$.	0.25
	Với $b = 0$ thì $3x - 2026 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2026}{3}$.	0.25
	Với $a + b = 0$ thì $6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.	0.25
	Vậy tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{-2023}{3}; \frac{2026}{3}; \frac{1}{2} \right\}$	0.25
	b) (2.5 điểm) . Điều kiện: $\begin{cases} x + 9 \geq 0 \\ x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -9 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -6$.	0.5
	Phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{x + 9} - 2023) + [2023\sqrt{x + 6} - \sqrt{(x + 9)(x + 6)}] = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x + 9} - 2023) + \sqrt{x + 6}(2023 - \sqrt{x + 9}) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x + 9} - 2023)(1 - \sqrt{x + 6}) = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 9} = 2023 \\ \sqrt{x + 6} = 1 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4092520 \\ x = -5 \end{cases}$ (thỏa điều kiện). (Sai một nghiệm trừ 0.25 điểm). Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-5; 4092520\}$	0.5
	Cách khác: <i>Thí sinh có thể đặt $a = \sqrt{x + 9} \geq 0, b = \sqrt{x + 6} \geq 0$ để đưa phương trình về dạng tích $(a - 2023)(1 - b) = 0$. Nếu đặt đúng điều kiện và trình bày lời giải chính xác, hợp lý vẫn cho điểm tối đa.</i>	

3 (2.0 điểm)	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM (Cauchy) cho hai số dương ta có $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}$	1.0
	Dấu “bằng” xảy ra khi và chỉ $\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases}$.	0.5
	Cộng vế theo vế ba đẳng thức trên rồi chuyển vế, rút gọn ta được $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$ Vậy $M = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + 1} = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{4} = 2.$	0.5
4 (4.0 điểm)	Hình vẽ	
	a) (2.0 điểm) Vì $BM \perp DK, DM \perp BK$ nên M là trực tâm $\triangle BDK$. Do đó $KM \perp DB$	1.0
	Xét $\triangle KHD$ và $\triangle KCB$ có $\widehat{K}$ chung và $\widehat{KHD} = \widehat{KCB} = 90^\circ$.	0.5
	Do đó $\triangle KHD \sim \triangle KCB$ (g - g) $\Rightarrow \frac{KH}{KC} = \frac{KD}{KB} \Rightarrow KC \cdot KD = KH \cdot KB$.	0.5
	b) (2.0 điểm) Ta có $S_{ABM} + S_{DCM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM + \frac{1}{2} CD \cdot CM = \frac{1}{2} a \cdot BM + \frac{1}{2} a \cdot CM$	0.5
	$= \frac{1}{2} a(BM + CM) = \frac{1}{2} a^2$	0.5

	Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2$ ta đi đến $S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2 \geq \frac{1}{2}(S_{ABM} + S_{DCM})^2 = \frac{a^4}{8}.$	0.5
	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S_{ABM} = S_{DCM} \Leftrightarrow BM = CM$ $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC. Vậy $\min(S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2) = \frac{a^4}{8}$ khi và chỉ khi M là trung điểm của BC.	0.5
5 (2.0 điểm)	Hình vẽ 	
	Kẻ $AH \perp BC$ thì H nằm giữa B và M. Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$	0.5
	$= 1 + 2 \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} = 1 + 2 \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC^2}$	0.5
	$= 1 + 2 \cdot \frac{AH \cdot BC}{BC^2} = 1 + 2 \frac{AH}{BC}$	0.5
	$= 1 + \frac{2AH}{2AM} = 1 + \frac{AH}{AM} = 1 + \sin \beta.$ Vậy $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin \beta = 1$.	0.5
6 (2.0 điểm)	Ta có $ab + bc + ca = 4 - abc \Leftrightarrow abc + ab + bc + ca = 4$ $\Leftrightarrow abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8 = ab + bc + ca + 4(a + b + c) + 12$ $\Leftrightarrow (a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 2)(b + 2) + (b + 2)(c + 2) + (c + 2)(a + 2).$ Chia cả hai vế cho $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$ ta thu được $\frac{1}{a + 2} + \frac{1}{b + 2} + \frac{1}{c + 2} = 1.$	0.5
	Suy ra tồn tại các số dương m, n, p sao cho $a = \frac{2m}{n + p}, b = \frac{2n}{p + m}, c = \frac{2p}{m + n}.$	

	Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\sqrt{\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m}} + \sqrt{\frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n}} + \sqrt{\frac{2p}{m+n} \cdot \frac{2m}{n+p}} \leq 3$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{m}{n+p} \cdot \frac{n}{p+m}} + 2\sqrt{\frac{n}{p+m} \cdot \frac{p}{m+n}} + 2\sqrt{\frac{p}{m+n} \cdot \frac{m}{n+p}} \leq 3$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{n}{n+p} \cdot \frac{m}{p+m}} + 2\sqrt{\frac{p}{p+m} \cdot \frac{n}{m+n}} + 2\sqrt{\frac{m}{m+n} \cdot \frac{p}{n+p}} \leq 3 \quad (*)$	0.5
	Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (*). Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $2\sqrt{\frac{n}{n+p} \cdot \frac{m}{p+m}} \leq \frac{n}{n+p} + \frac{m}{p+m}$ $2\sqrt{\frac{p}{p+m} \cdot \frac{n}{m+n}} \leq \frac{p}{p+m} + \frac{n}{m+n}$ $2\sqrt{\frac{m}{m+n} \cdot \frac{p}{n+p}} \leq \frac{m}{m+n} + \frac{p}{n+p}$ (Mỗi bất đẳng thức đúng được 0.25 điểm)	0.75
	Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta hoàn thành việc chứng minh bất đẳng thức (*). Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. .	0.25

===Hết===

Lưu ý :

- Những câu, những ý nào thí sinh làm khác với đáp án nhưng lập luận hợp lý và đáp số đúng vẫn đạt điểm tối đa ở câu đó, ý đó.
- Những kiến thức mới thí sinh đưa vào bài làm nếu đúng vẫn được chấp nhận bởi vì đây là đối tượng học sinh giỏi có năng khiếu Toán.
- Khuyến khích những cách giải sáng tạo, độc đáo và có cộng điểm thưởng cho những cách giải này.