

**Đề chính thức**

Đề gồm 01 trang

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

**Bài I (5.0 điểm).**

1. Cho biểu thức

$$P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) \text{ với } x \neq 0, x \neq \pm 1$$

a) Rút gọn  $P$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$  khi  $x > 1$

2. Cho  $a, b, c$  là các số khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2025. \text{ Tính giá trị biểu thức } M = c^2(a+b)$$

**Bài II (4.0 điểm).**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn phương trình

$$x^2 - 2y^2 + xy + x - y - 5 = 0$$

2. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^3 + 3y - 3x = 1 \end{cases}$$

**Bài III (3.0 điểm).**

1. Tìm các số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 - n + 13$  là số chính phương?

2. Chọn ngẫu nhiên hai số nguyên dương không vượt quá 13. Tính xác suất để hai số được chọn là hai số nguyên tố trong đó có một số chẵn và một số lẻ.

**Bài IV (6.0 điểm).**

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Từ  $B$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$ . Từ  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AC$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $K$ .

1. Chứng minh  $\triangle AEF$  đồng dạng với  $\triangle ABC$

2. Chứng minh  $BH \cdot AD = AC \cdot BD$  và  $AK \perp EF$

3. Chứng minh  $\sin^2 \widehat{BAC} + \sin^2 \widehat{ABC} + \sin^2 \widehat{BCA} > 2$

**Bài V (2.0 điểm).**

1. Ở một quốc gia có 20 sân bay, mà khoảng cách giữa các cặp sân bay đó đều khác nhau. Từ mỗi sân bay có một máy bay cất cánh và bay đến sân bay gần nhất. Chứng minh rằng không có sân bay nào có nhiều hơn 5 máy bay bay tới.

2. Cho  $a, b, c$  là các dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$ .

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2}$$

.....Hết.....