

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang)

Câu 1. (2,5 điểm)

a) Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn M và chứng minh rằng $M < \frac{1}{3}$.

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x - 2y - \sqrt{xy} + \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x + 3y}{(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})\sqrt{x + 4y + 4\sqrt{xy}}}$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy (O là gốc tọa độ), cho hình bình hành OABC có điểm A(3;5), điểm C thuộc đường thẳng $y = -x$ và có hoành độ dương. Biết rằng diện tích của hình bình hành OABC bằng 24. Tìm tọa độ điểm B.

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm x biết $\frac{\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} + 6}{x} = x^2 - 5x + 8$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)(x+y+2z) = 15 \\ (y+z)(2x+y+z) = 15 \\ (x+z)(x+2y+z) = 12 \end{cases}$$

Câu 4. (1,0 điểm) Một số tự nhiên có ba chữ số có tổng chữ số hàng trăm với chữ số hàng đơn vị bằng 9 và nếu đổi chỗ hai chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới có ba chữ số nhỏ hơn số ban đầu là 99. Tìm số đã cho, biết rằng số đó chia hết cho 18.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi F là hình chiếu vuông góc của H trên BC, M là tiếp điểm của EF với đường tròn nội tiếp tam giác DEF, I là giao điểm (khác F) của HF với đường tròn đường kính DF và N là giao điểm của IM với ED.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, H, F thẳng hàng và $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng ED và HN vuông góc với nhau.

c) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC bằng R. Gọi K là điểm thay đổi trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) và P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên AB và AC. Khi PQ lớn nhất, hãy tính diện tích của tam giác OPQ theo R.

---Hết---