

Câu 1. (4.0 điểm): Thực hiện phép tính :

a) $A = \frac{11}{24} - \frac{5}{41} + \frac{13}{24} + 0,5 - \frac{36}{41}$

b) $B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

c) $C = \frac{10}{56} + \frac{10}{140} + \frac{10}{260} + \dots + \frac{10}{1400}$

d) $D = \frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 13} + \frac{3}{13 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 21}$

Câu 2. (4.0 điểm):

1) Tìm x, y, z biết:

a) Cho hai số x, y thỏa mãn : $(x + 2022)^{2024} + |y - 2023| = 0$. Tính $D = x + y$

b) $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 72$

2) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, chia cho $x - 2$ dư 22, chia cho $x^2 - 4$ được thương là $x + 3$ và còn dư.

Câu 3. (4.0 điểm):

a) Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn: $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$.

Chứng minh rằng: $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương?

Câu 4. (6.0 điểm):

1) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\angle HAB$ cắt BC tại D. Kẻ $DK \perp AB$ ($K \in AB$). Chứng minh:

a/ $AH = AK$

b/ ΔACD cân

2) Cho $\angle A = 75^\circ$. Điểm D trên cạnh BC sao cho các tam giác ABD và ACD là các tam giác cân. Tính số đo của $\angle B, \angle C$

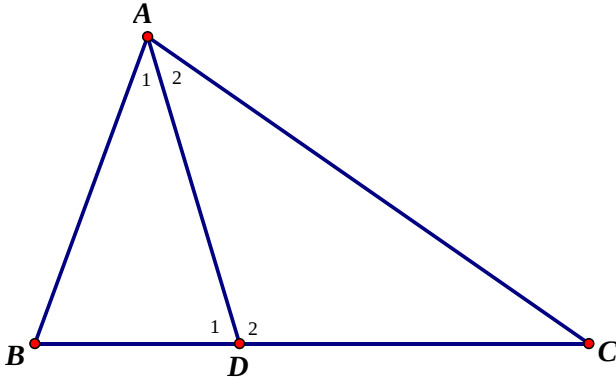
Câu 5. (2.0 điểm): Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $a + b = -2$ và $ab - 1$ là một số chính phương.

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:.....SBD.....

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 4.0 đ	a	$A = \frac{11}{24} - \frac{5}{41} + \frac{13}{24} + 0,5 - \frac{36}{41}$ $= \frac{11}{24} + \frac{13}{24} - \frac{5}{41} - \frac{36}{41} + 0,5$ $= 1 - 1 + 0,5$ $= 0,5$	0.5 0.5
	b	$B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$ $= \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5}$ $= \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$	0,5 0,5
	c	$C = \frac{10}{56} + \frac{10}{140} + \frac{10}{260} + \dots + \frac{10}{1400} = \frac{5}{28} + \frac{5}{70} + \frac{5}{130} + \dots + \frac{5}{700}$ $= \frac{5}{4 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 10} + \frac{5}{10 \cdot 13} + \dots + \frac{5}{25 \cdot 28}$ $= \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{28} \right)$ $= \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{28} \right) = \frac{5}{3} \left(\frac{7}{28} - \frac{1}{28} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{28} = \frac{5}{14}$	0.25 0.25 0.5
	d	$\frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 13} + \frac{3}{13 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 21} = 4 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{5}{8 \cdot 13} + \frac{3}{13 \cdot 16} + \frac{5}{16 \cdot 21} \right)$ $= 4 \cdot \left(\frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{7-4}{4 \cdot 7} + \frac{8-7}{7 \cdot 8} + \frac{13-8}{8 \cdot 13} + \frac{16-13}{13 \cdot 16} + \frac{21-16}{16 \cdot 21} \right)$ $= 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} \right)$ $= 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) = 4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 2 4.0 đ	1.a	Vì $(x + 2022)^{2024} \geq 0; y - 2023 \geq 0 \Rightarrow (x + 2022)^{2024} + y - 2023 \geq 0$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = -2022; y = 2023$ Do đó $D = x + y = 1$	0,25 0,5 0,25
	1.b	Ta có: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2} \text{ và } x + y + z = 72$	

		$\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ $= \frac{4(3x-2y)}{4.4} = \frac{3(2z-4x)}{3.3} = \frac{2(4y-3z)}{2.2} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4}$ $= \frac{12x-12x+8y-8y+6z-6z}{29} = \frac{0}{29} = 0$ Do đó: $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ $2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4}$ $4y = 3z \Rightarrow \frac{z}{4} = \frac{y}{3}$ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ Suy ra: Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{72}{9} = 8$ $\Rightarrow x=16; y=24; z=32$	0.25
			0.25
			0.25
2		Vì đa thức f(x) chia cho $x^2 - 4$ còn dư, và đa thức chia là $x^2 - 4$ có bậc hai nên đa thức dư có bậc nhỏ hơn hai.	0,25
		Đặt đa thức dư là $ax + b$ (a, b là hằng số)	0,25
		Khi đó $f(x) = (x^2 - 4)(x + 3) + ax + b$	0,25
		Ta có: f(x) chia cho $x+2$ dư 10	0,25
		nên $f(x) = (x+2).g(x) + 10$	0,25
		Do đó $f(-2) = 10 \Rightarrow -2a + b = 10$ (1)	0,25
		Tương tự: $\Rightarrow 2a + b = 22$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) Ta có $\begin{cases} -2a + b = 10 \\ 2a + b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 16 \end{cases}$	0,5
		Do đó: $f(x) = (x^2 - 4).(x+3) + 3x + 16 = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 + 3x + 16$	0,25
		$= x^3 + 3x^2 - x + 4$	0,25
		Vậy $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$	0,25
			0,25
Câu 3 4.0 điểm	a	Ta có: $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$	
		$x^2 - 5x + 9 = xy - 4y$ $\Rightarrow x^2 - 5x + 9 = y(x - 4)$ $\Rightarrow x^2 - 5x + 9 : x - 4$ $\Rightarrow x(x - 4) - (x - 4) + 5 : x - 4 \Rightarrow 5 : x - 4$ $\Rightarrow x - 4 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$ Với $x = -1$ thì $y = -3$ Với $x = 3$ thì $y = -3$ Với $x = 5$ thì $y = 9$ Với $x = 9$ thì $y = 9$	0,5
			0,5

Câu 4 6.0 đ		Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$ Học sinh có thể viết đẳng thức đã cho về dạng: $(x-4)(x-y-1) = -5$ Từ đó tìm ra các cặp số (x, y)	0,5
		Học sinh có thể viết đẳng thức đã cho về dạng: $(x-4)(x-y-1) = -5$ Từ đó tìm ra các cặp số (x, y)	0,5
	b	Ta có: $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1$. Do đó ta có số chính phương lẻ chia 8 luôn dư Nếu a, b, c, d đều lẻ thì a^2, b^2, c^2, d^2 chia 8 đều dư 1 dẫn đến không xảy ra $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3) Vậy trong các số a, b, c, d phải có ít nhất một số chẵn nên $abcd + 2023$ lẻ $abcd + 2023 = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ Đặt $= (k+1-k)(k+1+k) = (k+1)^2 - k^2$ (dpcm)	0,5
			0,5
			0,5
			0,5
	a	Vẽ hình đúng a/ Chỉ ra 2 tam giác vuông $\triangle AHD = \triangle AKD$ (ch-gn) $\Rightarrow AH = AK$	0,25
			2,0
	b	b/ Do $\triangle AHD$ vuông tại H nên $\angle ADH + \angle DAH = 90^\circ$ (1) Do $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\angle CAD + \angle DAB = 90^\circ$ (2) AD là tia phân giác của $\angle HAB \Rightarrow \angle DAB = \angle DAH$ (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $\angle ADH = \angle CAD$ $\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C	0,5
			0,5
			0,5
			0,25
			0,5
	c	Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 75^\circ$. Điểm D trên cạnh BC sao cho các tam giác ABD và ACD là các tam giác cân. Tính số đo của $\angle B, \angle C$  Do $\angle D_1$ và $\angle D_2$ là 2 góc kề bù nhau nên trong 2 góc đó sẽ có ít nhất góc không nhọn, giả sử đó là $\angle D_2$ Trong tam giác cân, góc ở đáy luôn là góc nhọn và $\angle D_2$ không nhọn nên $\triangle ADC$ chỉ có thể cân tại D. - Nếu $\triangle ABD$ cân tại D và $\triangle ADC$ cân tại D $\Rightarrow \angle A = 90^\circ \Rightarrow$ Không phù hợp với gt $\angle A = 75^\circ$. - Nếu $\triangle ABD$ cân tại A và $\triangle ADC$ cân tại D Lập luận để có $\angle C = x, \angle D_1 = 2x = \angle B \Rightarrow \angle B + \angle C = 2x + x = 3x \Rightarrow 180^\circ - 75^\circ = \angle B + \angle C = 3x \Rightarrow x = 105^\circ : 3 = 35^\circ$ $\Rightarrow \angle B = 70^\circ, \angle C = 35^\circ$	0,25
			0,25

		- Nếu $\triangle ABD$ cân tại B và $\triangle ADC$ cân tại D Lập luận để có $C = A_2 = x$, $D_1 = 2x = A_1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 2x + x = 3x \Rightarrow 75^\circ = 3x \Rightarrow C = x = 75^\circ : 3 = 25^\circ$ $\Rightarrow B = 180^\circ - 75^\circ - 25^\circ = 80^\circ$. Tương tự nếu giả sử D_1 không nhọn ta được các kết quả $C = 70^\circ$, $B = 35^\circ$ và $C = 80^\circ$, $B = 25^\circ$	0,5 0,5
Câu 5 2.0 đ		+) Khi $ab - 1$ là một số chính phương $\Rightarrow ab - 1 = c^2$ (với $c \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow ab = c^2 + 1$ +) Do $c^2 + 1 \geq 1$ nên $ab > 0 \Rightarrow a$ và b là các số nguyên cùng dấu +) Do $a + b = -2 < 0$ nên a và b đồng thời là số âm +) Do a, b là các số nguyên nên $a \leq -1$; $b \leq -1$ +) Nếu $a \leq -2 \Rightarrow b \geq 0$ (vô lý) $\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -1$ khi đó $ab - 1 = 0$ (thỏa mãn là số chính phương)	0,5 0,5 0,5 0,5

Lưu ý:

- Điểm bài thi làm tròn đến 0,25.

- Nếu thí sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.