

ĐỀ CHÍNH THỨC

I. PHẦN CHUNG (dành cho tất cả các thí sinh)

Bài 1. (1,5 điểm) Tính giá trị của các biểu thức sau:

1) $A = 16\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 13\frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{81}}$

2) $B = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

3) $M = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \left(1 + \frac{1}{4.6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2022.2024}\right)$.

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Tìm x, y biết: a) $(2x - 1)^{10} = 49^5$;

b) $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$.

2) Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 104 học sinh. Nếu có 8 em học sinh lớp 7B chuyển sang lớp 7A và 2 em học sinh lớp 7C chuyển sang lớp 7A thì số học sinh còn lại của lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ nghịch với 2; 4; 3. Tính số học sinh lúc đầu của mỗi lớp.

Bài 3. (1,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $3xy - 5x - 6y + 7 = 0$.

2) Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} > 90^\circ$). Kẻ AM vuông góc với BC tại M. Kẻ tia Bx vuông góc với AB (tia Bx và điểm C nằm khác phía so với đường thẳng AB). Trên tia Bx lấy điểm E sao cho $AB = BE$. Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho $AD = BC$.

1) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{ABM} + 90^\circ$ và $BD = CE$.

2) Qua B kẻ đường thẳng song song với CE, cắt đường thẳng AM tại H. Chứng minh $BH \perp BD$.

3) Tia phân giác của góc ABC cắt AC tại K, tia phân giác của góc BKC cắt BC tại P, qua K kẻ đường thẳng vuông góc với KP, cắt đường thẳng BC tại Q. Trên đường thẳng CQ lấy điểm I sao cho $IK = IQ$. Chứng minh $\widehat{KBC} = \widehat{IKC}$.

II. PHẦN RIÊNG

1. Dành cho thí sinh bảng A

Bài 5. (2,0 điểm)

1) Một phố nhỏ có 44 người trong độ tuổi từ 1 đến 85 (tuổi mỗi người là một số nguyên dương). Chứng minh rằng trong số những người trên có hai người cùng tuổi hoặc có ba người mà tuổi của một người bằng tổng số tuổi của hai người kia.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử D là điểm nằm bên trong tam giác sao cho tam giác ABD cân và $\widehat{ADB} = 150^\circ$. Trên nửa mặt phẳng không chứa D có bờ là đường thẳng AC lấy điểm E sao cho tam giác ACE là tam giác đều. Chứng minh ba điểm B, D, E thẳng hàng.

2. Dành cho thí sinh bảng B

Bài 5. (2,0 điểm)

1) Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền là 200 triệu đồng, gửi theo lãi suất 6% kì hạn một năm lĩnh lãi mỗi quý (3 tháng). Theo qui định nếu đến hạn mà không đến lĩnh lãi thì số đó sẽ được nhập vào vốn gửi ban đầu. Do công việc người đó không đến lĩnh lãi quý thứ nhất, các quý còn lại vẫn đến lĩnh lãi bình thường. Vậy tổng số tiền gửi và lãi sau một năm người đó sẽ nhận được là bao nhiêu?

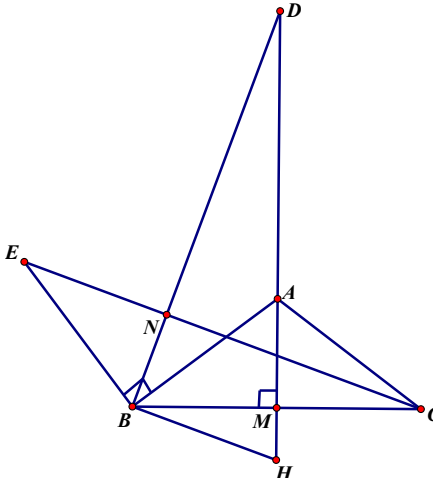
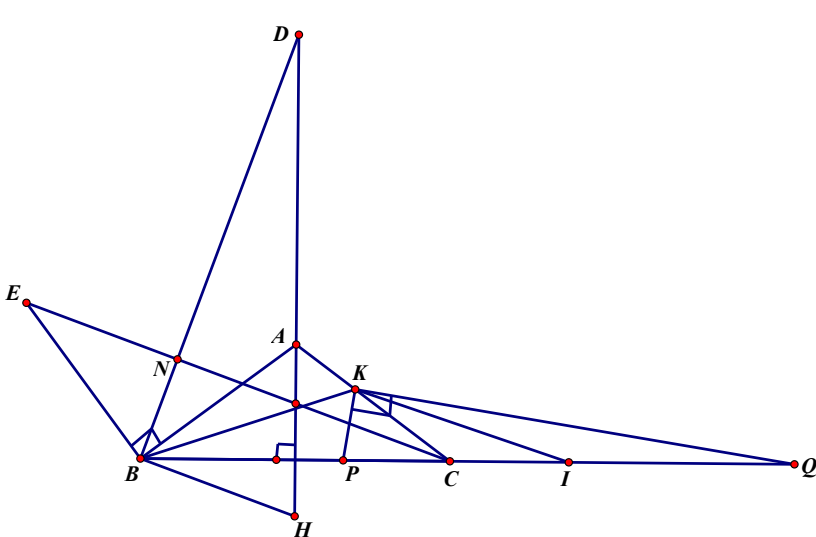
2) Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

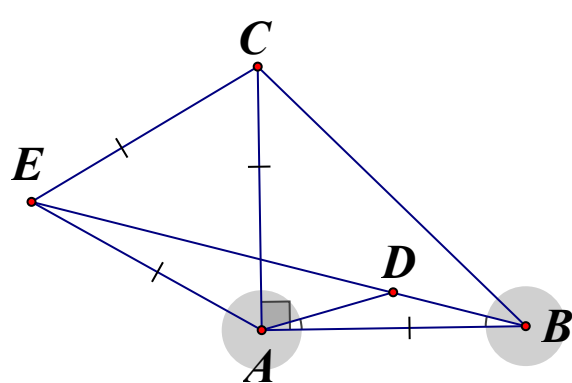
----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: ; Số báo danh:

Bài	Lời giải sơ lược	Điểm
1.1.a (0,5 điểm)		
	$A = 16\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 13\frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{81}} = 16\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} - 13\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9}$	0,25
	$= \frac{1}{9} \left(16\frac{3}{5} - 13\frac{3}{5} \right) = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3} \text{ Vậy } A = \frac{1}{3}$	0,25
1.1.b (0,5 điểm)		
	$B = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{(2^3)^4 \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}}$	0,25
	$= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$	0,25
1.2. (0,5 điểm)		
	$M = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4} \right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5} \right) \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 6} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2022 \cdot 2024} \right)$ $M = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \dots \frac{2023^2}{2022 \cdot 2024}$	0,25
	$M = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2023}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2022} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2023}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2024}$ $M = \frac{2023}{1} \cdot \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$ Vậy $M = \frac{2023}{2024}$	0,25
2.1.a) 0,75		
	a) $(2x-1)^{10} = 49^5$ $(2x-1)^{10} = 49^5$ $(2x-1)^{10} = 7^{10}$	0,25
	$2x-1 = 7$ hoặc $2x-1 = -7$	0,25
	* $2x-1 = 7$ $x = 4$ * $2x-1 = -7$ $x = -3$ Vậy $x \in \{4; -3\}$	0,25
2.1.b) 0,75		
	b) $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} \quad (1)$ Điều kiện: $x \neq 0$	0,25

	$(1) \Rightarrow \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} \Rightarrow \frac{1+5y}{5} = \frac{1+7y}{4}$	
	$4(1+5y) = 5(1+7y)$ $4 + 20y = 5 + 35y$ $15y = 1$ $y = \frac{-1}{15}$	0,25
	Thay $y = \frac{-1}{15}$ vào (1) ta được $x = 2$ (thỏa mãn) Vậy $x = 2, y = \frac{-1}{15}$	0,25
2.2) 1,0		
	Nếu chuyển 8 em học sinh lớp 7B sang lớp 7A và 2 em học sinh lớp 7C sang lớp 7A thì tổng số học sinh của cả ba lớp không đổi vẫn là 104 học sinh. Gọi số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C sau khi chuyển lần lượt là: a, b, c (học sinh) ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$; $a, b, c < 104$)	0,25
	Theo bài ra ta có: $2a = 4b = 3c$ và $a + b + c = 104$ Vì $2a = 4b = 3c \Rightarrow \frac{2a}{12} = \frac{4b}{12} = \frac{3c}{12} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$	0,25
	Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{6+3+4} = \frac{104}{13} = 8$ (do $a + b + c = 104$) Do đó: $a = 6.8 = 48$ (thỏa mãn) $b = 3.8 = 24$ (thỏa mãn) $c = 4.8 = 32$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy: Số học sinh lúc đầu của lớp 7A là: $48 - 8 - 2 = 38$ (học sinh) Số học sinh lúc đầu của lớp 7B là: $24 + 8 = 32$ (học sinh) Số học sinh lúc đầu của lớp 7C là: $32 + 2 = 34$ (học sinh)	0,25
3.1) 0,5		
	Ta có $3xy - 5x - 6y + 7 = 0.$ $3y(x-2) - 5(x-2) = 3$ $(x-2)(3y-5) = 3$ $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbb{Z}; 3y-5 \in \mathbb{Z}$ $3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$	0,25
	Từ đó xét các trường hợp và tìm được $(x; y) \in \left\{ \left(3; \frac{8}{3}\right); (5; 2); \left(1; \frac{2}{3}\right); \left(-1; \frac{4}{3}\right) \right\}$ Đối chiếu điều kiện tìm được $x = 5; y = 2$ Vậy $x = 5; y = 2$	0,25
3.2) 0,5		
	Với $p = 2$ ta có $2^p + p^2 = 12$ không là số nguyên tố. Với $p = 3$ ta có $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố (thỏa mãn).	0,25
	Với $p > 3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1)(2^p + 1)$	0,25

	Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1$ chia hết cho 3 và $2^p + 1$ chia hết cho 3. Do đó, $2^p + p^2$ là hợp số. Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.	
4) Vẽ hình ghi gtl đủ làm ý 1		
		0,25
4.1) 1,25		
	Ta có $AM \perp BC$ tại M nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$ Lại có $\widehat{BAD}$ là góc ngoài $\triangle ABM$ tại A nên $\widehat{BAD} = \widehat{ABM} + \widehat{AMB} = \widehat{ABM} + 90^\circ$ (1)	0,25
	Ta có $AB \perp BE$ nên $\widehat{ABE} = 90^\circ$ $\widehat{EBC} = \widehat{EBA} + \widehat{ABM} = \widehat{ABM} + 90^\circ$ (2) (1)(2) $\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{BAD}$	0,5
	Chỉ ra $\triangle ABD = \triangle BEC$ (c.g.c) Suy ra $BD = EC$ (hai cạnh tương ứng) (đpcm)	0,5
4.2) 0,75		
	Gọi giao điểm của EC và BD là N. Chỉ ra $\widehat{NCB} = \widehat{BDM}$ mà $\widehat{BDM} + \widehat{DBM} = 90^\circ$	0,25
	Suy ra $\widehat{NCB} + \widehat{NBC} = 90^\circ$ Suy ra $\widehat{BNC} = 90^\circ$ Suy ra $BD \perp EC$	0,25
	Kết hợp với $BH \parallel EC \Rightarrow BH \perp BD$	0,25
4.3) 0,75		
		0,25
	Chỉ ra $\triangle IKQ$ cân và $\widehat{IKQ} = \widehat{IQK}$	0,25

	Chỉ ra $\widehat{IKP} = \widehat{IPK}$ Ta có $\widehat{IKP} = \widehat{IKC} + \widehat{CKP}$; $\widehat{IPK} = \widehat{KBC} + \widehat{BKP}$ (3) mà $\widehat{IKP} = \widehat{IPK}$; $\widehat{CKP} = \widehat{BKP}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{KBC} = \widehat{IKC}$	0,25
		0,25
5.1 A) 0,5		
	Gọi số tuổi của 44 người $a_1; a_2; \dots; a_{44}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{44} \leq 85$. Xét bộ 87 số $a_1; a_2; \dots; a_{44}$ và $a_2 - a_1; a_3 - a_1; \dots; a_{44} - a_1$. Ta có $0 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_1 \leq \dots \leq a_{44} - a_1 < 85$ Vậy 87 số trên có giá trị từ 0 đến 85.	0,25
	Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại hai số có giá trị bằng nhau. TH1. Hai số đó thuộc bộ $a_1; a_2; \dots; a_{44}$ hoặc thuộc bộ $a_2 - a_1; a_3 - a_1; \dots; a_{44} - a_1$ thì tồn tại hai người có số tuổi bằng nhau. TH2. Hai số đó có một số thuộc bộ $a_1; a_2; \dots; a_{44}$ và một số thuộc bộ $a_2 - a_1; a_3 - a_1; \dots; a_{44} - a_1$. Giải sử hai số đó là a_i và $a_j - a_1$ với $1 \leq i \leq 44, 2 \leq j \leq 44 \Rightarrow a_i = a_j - a_1$ $\Rightarrow a_i + a_1 = a_j$ hay có ba người mà tuổi của một người bằng tổng số tuổi của hai người kia. Vậy trong số những người trên có hai người cùng tuổi hoặc có ba người mà tuổi của một người bằng tổng số tuổi của hai người kia.	0,25
5.2 A) 1,5		
		0,25
	Do tam giác ABD cân tại D và $\widehat{ADB} = 150^\circ$ nên $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$ Mặt khác tam giác AEC đều và tam giác ABC vuông cân tại A nên $AE = AC = AB$ và $\widehat{EAC} = 60^\circ$	0,5
	Xét tam giác ABE ta có: $\widehat{EAB} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ và $AB = AE$ nên tam giác ABE cân tại A do đó $\widehat{ABE} = 15^\circ$. Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{ABE} = 15^\circ$. (1)	0,5
	Vì $CA \perp AB$, $\widehat{CAE} = 60^\circ < 90^\circ$ nên E và C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB suy ra E và D cùng nằm trên nửa mặt phẳng đó. (2) Từ (1) & (2) suy ra hai tia BD và BE trùng nhau, tức là ba điểm B, D, E thẳng hàng	0,25

5.1B) 1,0		
	Lãi suất mỗi quý là $6\% : 4 = 1,5\%$	0,25
	Tiền lãi quý thứ nhất $200.1,5\% = 3$ (triệu)	0,25
	Tổng số tiền cả lãi và gốc sau quý thứ nhất là $200 + 3 = 203$ (triệu)	
	Tiền lãi quý thứ hai $203.1,5\% = 3,045$ (triệu)	0,25
	Tiền lãi quý thứ ba và quý thứ tư bằng tiền lãi quý thứ hai.	
	Vậy tổng số tiền cả gốc và lãi sau 1 năm là : $200 + 3 + 3.3,045 = 212,135$ (triệu)	0,25
5.2.B) 1,0		
	$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$ Ta có: $7^2.A = 7^2.\left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}\right)$	0,25
	$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$	0,25
	$\Rightarrow 49A + A = \left(1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}\right) + \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}\right)$	0,25
	$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$	0,25

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----Hết-----