

ĐỀ CHÍNH THỨC
(gồm 09 câu, 01 trang)

MÔN: Toán

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Ngày giao lưu: 09/01/2025.

Câu 1. (2,0 điểm) Rút gọn biểu thức $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$, với $x \neq \pm 1$.

Câu 2. (2,0 điểm) Cho các số thực $a, b, c \neq 0$ và không phải là các số đối của nhau, thỏa mãn $ab + bc + ca = 2025$. Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a^2+2025)(b^2+2025)(c^2+2025)}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Tìm x biết: $\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12 \left(\frac{x-2}{x-4} \right)^2 = 0$.

Câu 4. (2,0 điểm)

1) Xác định đa thức $f(x)$. Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 11, chia cho $x+2$ dư -1, chia cho x^2-4 được thương là $3x$ và còn dư.

2) Có 3 hộp đựng thẻ. Hộp 1 chứa các tấm thẻ đánh số $\{1; 2; 3\}$. Hộp 2 chứa các tấm thẻ đánh số $\{2; 4; 6; 8\}$. Hộp 3 chứa các tấm thẻ đánh số $\{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ rồi cộng ba số trên ba tấm thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả được chọn là một số lẻ.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu là 10 km/giờ. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Câu 6. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + x^2 + x + 8y = 16y^2$.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho n số nguyên dương sao cho $4n+13$ và $5n+16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2025n+2043$ chia hết cho 24.

Câu 8. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng vuông góc với CA tại C và đường thẳng vuông góc với BA tại B cắt nhau tại điểm L .

1) Chứng minh rằng M là trung điểm của HL và AL vuông góc với EF .

2) Gọi I, K, P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống BA, BE, CF, CA . Chứng minh bốn điểm I, K, P, Q thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng: $\frac{AD}{36DH} + \frac{BE}{9EH} + \frac{CF}{4FH} \geq 1$.

Câu 9. (1,0 điểm) Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \left(\frac{x}{x+y} \right)^4 + \left(\frac{y}{y+z} \right)^4 + \left(\frac{z}{z+x} \right)^4$.

-----Hết-----

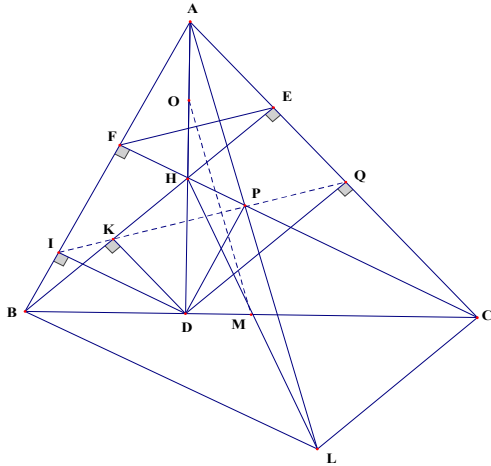
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HDC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI THCS (LỚP 8)
THÀNH PHỐ THANH HÓA CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2024-2025
MÔN: Toán

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1		Rút gọn $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$, với $x \neq \pm 1$.	2,0
		$A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$	0,5
		$= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1}$ $= \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)(x - 1)} - \frac{1}{x - 1}$	0,5
		$= \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x - 1)^2}{(x^2 + 1)(x - 1)}$	0,5
		$= \frac{1 - x}{x^2 + 1}.$	0,25
		Vậy $A = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$ với $x \neq \pm 1$.	0,25
2		Cho các số thực $a, b, c \neq 0$ và không phải là các số đối của nhau, thỏa mãn $ab + bc + ca = 2025$. Tính: $B = \frac{(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2}{(a^2 + 2025)(b^2 + 2025)(c^2 + 2025)}$	2,0
		Ta có: $a^2 + 2025 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(c + a)$	0,5
		Tương tự ta được: $b^2 + 2025 = (a + b)(b + c); c^2 + 2025 = (b + c)(c + a)$	0,5
		Khi đó: $B = \frac{(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2}{(a^2 + 2025)(b^2 + 2025)(c^2 + 2025)} = \frac{(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2}{(a + b)(c + a)(a + b)(b + c)(c + a)(b + c)}$	0,5
		$= \frac{(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2}{(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2} = 1$ Vậy $B = 1$.	0,5
		Tìm x biết: $\left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^2 + \frac{x + 1}{x - 4} - 12 \left(\frac{x - 2}{x - 4} \right)^2 = 0$.	2,0

3	Điều kiện xác định $x \neq 2; x \neq 4$		0,25
	Đặt $a = \frac{x+1}{x-2}; b = \frac{x-2}{x-4}$, ta có $a^2 + ab - 12b^2 = 0$ (1)		0,25
	Từ (1) suy ra $(a-3b)(a+4b) = 0$ Suy ra $\begin{cases} a = 3b \\ a = -4b \end{cases}$		0,25
	*) $a = 3b$ thì $\frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-4}$, suy ra $(x+1)(x-4) = 3(x-2)^2$, suy ra $2x^2 - 9x + 16 = 0$, suy ra $4x^2 - 18x + 32 = 0$, suy ra $\left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} = 0$ (Vô lí)		0,5
	*) $a = -4b$ thì $\frac{x+1}{x-2} = -4 \cdot \frac{x-2}{x-4}$, suy ra $(x+1)(x-4) = -4(x-2)^2$ Suy ra $\begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{4}{5}(tm) \end{cases}$		0,5
	Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x \in \left\{3; \frac{4}{5}\right\}$		0,25
4	1) Xác định đa thức $f(x)$. Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 11, chia cho $x+2$ dư -1 và chia cho x^2-4 được thương là $3x$ và còn dư. 2) Có 3 hộp đựng thẻ. Hộp 1 chứa các tấm thẻ đánh số $\{1; 2; 3\}$. Hộp 2 chứa các tấm thẻ đánh số $\{2; 4; 6; 8\}$. Hộp 3 chứa các tấm thẻ đánh số $\{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ rồi cộng ba số trên ba tấm thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả là một số lẻ.		2,0
1		Vì đa thức $f(x)$ chia cho đa thức bậc hai x^2-4 còn dư nên đa thức dư có bậc cao nhất bằng 1. Gọi đa thức dư đó là $ax+b$ Ta có $f(x) = 3x(x^2-4) + ax+b$	0,25
		Suy ra $\begin{cases} f(2) = 2a+b \\ f(-2) = -2a+b \end{cases}$	0,25
		Lại có đa thức $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 11, chia $x+2$ dư -1 nên theo định lí Bezute ta có $f(2) = 11$ và $f(-2) = -1$	0,25
		Suy ra $\begin{cases} 2a+b = 11 \\ -2a+b = -1 \end{cases} \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$ Suy ra $b = 5$	0,25
		Do đó $f(x) = 3x^3 - 9x + 5$, suy ra $f(x) = 3x^3 - 9x + 5$	
		Gọi số ghi trên thẻ rút được từ hộp 1 là a, từ hộp 2 là b, từ hộp 3 là c Với $a \in \{1; 2; 3\}$, $b \in \{2; 4; 6; 8\}$, $c \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ Khi đó số các kết quả có thể rút được ba thẻ (a,b,c) là $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ (cách). Và các kết quả có thể này là đồng khả năng.	0,5
		Gọi A là biến cố rút được ba thẻ ghi số a,b,c mà $a+b+c$ là số lẻ.	0,25

	Vì $b \in \{2;4;6;8\}$, $c \in \{1;3;5;7;9;11\}$ nên $b+c$ là số lẻ. Để $a+b+c$ là số lẻ 2) và $a \in \{1;2;3\}$ thì $a=2$. Do đó số kết quả thuận lợi để biến cố A xảy ra là $1.4.6=24$.	
	Vậy xác suất để biến cố A xảy ra là $P(A) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$	0,25
	Cho quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu là 10 km/giờ. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?	1,0
	Nếu C là vị trí xe máy bị hỏng thì $AC = 90\text{km}$; $CB = 30\text{km}$. Gọi vận tốc (km/h) của xe máy khi đi từ A đến C là x, $x > 10$ thì vận tốc của xe máy khi đi từ C đến B là $(x-10)$ (km/giờ). Xe máy đi quãng đường AC hết $\frac{90}{x}$ (giờ) và CB hết $\frac{30}{x-10}$ (giờ).	0,5
5	Thời gian sửa xe máy 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ. Thời gian xe đi hết quãng đường AB (kể cả sửa xe) là 4 giờ 40 phút = $\frac{14}{3}$ giờ. Biến đổi thành $3x^2 - 110x + 600 = 0$ Suy ra $(x-30)(3x-20) = 0$. Giải ra ta được $x = 30$ thỏa mãn điều kiện.	0,25
	Thời gian đi từ A đến C là $90:30 = 3$ giờ. Thời điểm bị hỏng xe lúc 10 giờ sáng cùng ngày.	0,25
	Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + x^2 + x + 8y = 16y^2$.	2,0
	Với x, y là các số nguyên ta có $x^3 + x^2 + x + 8y = 16y^2$. Suy ra $x^3 + x^2 + x + 1 = 16y^2 - 8y$ Hay $(x^2 + 1)(x + 1) = (4y - 1)^2$	0,5
6	Vì $(4y - 1)^2$ là số chính phương lẻ nên $x^2 + 1$ và $x + 1$ đều là các số nguyên dương lẻ Gọi $(x^2 + 1; x + 1) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x^2 + 1 : d$ và $x + 1 : d$ và d lẻ Suy ra $x^2 + 1 : d$ và $x^2 - 1 : d$. Do đó $(x^2 + 1) - (x^2 - 1) = 2 : d$, suy ra $d = 1$ (vì d lẻ)	0,5

	Do đó $x^2 + 1$ và $x + 1$ đều là các số chính phương.	0,25
	Mặt khác $x^2, x^2 + 1$ là hai số chính phương liên tiếp nên $x = 0$	0,25
	Khi đó $(4y - 1)^2 = 1$, suy ra $y = 0$ (thỏa mãn) hoặc $y = \frac{1}{2}$ (loại)	0,25
	Vậy $(x; y) = (0; 0)$	0,25
	Cho n số nguyên dương sao cho $4n + 13$ và $5n + 16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2025n + 2043$ chia hết cho 24.	2,0
	Giả sử $4n + 13 = a^2$ và $5n + 16 = b^2$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$), từ $4n + 13 = a^2 \Rightarrow a$ là số lẻ Ta có $4n + 13 = a^2 \Leftrightarrow 4(n + 3) = a^2 - 1 \Leftrightarrow 4(n + 3) = (a - 1)(a + 1)$	0,25
	Vì a là số lẻ nên $a - 1; a + 1$ là hai số chẵn liên tiếp, do đó $(a - 1)(a + 1) : 8 \Rightarrow (n + 3) : 2 \Rightarrow n$ là số lẻ $\Rightarrow b^2 = 5n + 16$ là số lẻ	0,25
	Lại có $5n + 16 = b^2 \Leftrightarrow 5(n + 3) = (b - 1)(b + 1) : 8$, Mà $(5, 8) = 1 \Rightarrow (n + 3) : 8(1)$ Ta có $a^2 + b^2 = 9n + 29 \equiv 2 \pmod{3}$	0,5
7	Mà $a^2 \equiv \{0; 1\} \pmod{3}, b^2 \equiv \{0; 1\} \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ $\Rightarrow \begin{cases} 4n + 13 \equiv 1 \pmod{3} \\ 5n + 16 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow (n + 3) \equiv 0 \pmod{3} \quad (2)$	0,5
	Vì $(3; 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra $(n + 3) : 24$ $2025n + 2043 = 2016(n + 1) + 9(n + 3) : 24$	0,5
8	Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng vuông góc với CA tại C và đường thẳng vuông góc với BA tại B cắt nhau tại điểm L. 1) Chứng minh rằng M là trung điểm của HL và AL vuông góc với EF. 2) Gọi I, K, P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống BA, BE, CF, CA. Chứng minh bốn điểm I, K, P, Q thẳng hàng. 3) Chứng minh rằng: $\frac{AD}{36DH} + \frac{BE}{9EH} + \frac{CF}{4FH} \geq 1$.	6,0
		

		Chứng minh rằng M là trung điểm của HL và AL vuông góc với EF .	2,5
	1)	Ta có $HB//CL$ (cùng vuông góc với AC) $HC//BL$ (cùng vuông góc với AB) Suy ra tứ giác $BHCL$ là hình bình hành. Mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HL	1,25
		Xét $\triangle BFC$ vuông tại F, có M là trung điểm của BC, nên $FM = \frac{1}{2}BC$ (1) Xét $\triangle BEC$ vuông tại E, có M là trung điểm của BC, nên $EM = \frac{1}{2}BC$ (2) Suy ra $EM=FM$ nên M thuộc trung trực của EF	0,5
		Xét $\triangle AFH$ vuông tại F, có O là trung điểm của AH, nên $FO = \frac{1}{2}AH$ (3) Xét $\triangle AEH$ vuông tại E, có O là trung điểm của AH, nên $EO = \frac{1}{2}AH$ (4) Suy ra $EO=FO$ nên O thuộc trung trực của EF	0,5
		Do đó OM là đường trung trực của EF nên $OM \perp EF$ Ta có $\triangle AHL$ có OM là đường trung bình nên $OM//AL$ Từ đó suy ra $AL \perp EF$	0,25
	2)	Gọi I, K, P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống BA, BE, CF, CA. Chứng minh bốn điểm I, K, P, Q thẳng hàng.	
		Ta có $HE//DQ$ (cùng vuông góc với AC) nên: $\Rightarrow \frac{AE}{EQ} = \frac{AH}{HD}$ (định lý Talet)	0,5
		Tương tự: $\frac{AF}{FI} = \frac{AH}{HD}$. Do đó $\Rightarrow \frac{AE}{EQ} = \frac{AF}{FI} \Rightarrow IQ // EF$ (1)	0,5
		Tương tự: $\frac{BK}{KE} = \frac{BD}{DC}$. Do đó $\frac{BK}{KE} = \frac{BI}{FI} \Rightarrow IK // FE$ (2)	0,5
		Từ (1), (2) và (3) ta suy ra 4 điểm I, K, P, Q thẳng hàng(theo tiên đề Ôclit)	0,5
	3)	Chứng minh rằng: $\frac{AD}{36DH} + \frac{BE}{9EH} + \frac{CF}{4FH} \geq 1$.	1,5
		$\frac{S_{ABC}}{S_{BHC}} = \frac{AD}{HD}; \frac{S_{ABC}}{S_{AHB}} = \frac{CF}{FH}; \frac{S_{ABC}}{S_{AHC}} = \frac{BE}{HE}$	0,5
		Do đó $\frac{AD}{HD} + \frac{4BE}{HE} + \frac{9CF}{FH} = S_{ABC} \left(\frac{1}{S_{BHC}} + \frac{4}{S_{AHC}} + \frac{9}{S_{AHB}} \right)$	0,25
		Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $x, y, z > 0$ Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$	0,25
		Áp dụng bất đẳng thức trên suy ra	0,25

	$\frac{AD}{HD} + \frac{4BE}{HE} + \frac{9CF}{FH} = S_{ABC} \left(\frac{1}{S_{BHC}} + \frac{4}{S_{AHC}} + \frac{9}{S_{AHB}} \right) \geq S_{ABC} \cdot \frac{36}{S_{ABC}} = 36$ Suy ra $\frac{AD}{36DH} + \frac{BE}{9EH} + \frac{CF}{4FH} \geq 1$ Dấu = xảy ra khi $\frac{HD}{AD} = \frac{1}{6}; \frac{HE}{BE} = \frac{1}{3}; \frac{HF}{CF} = \frac{1}{2}$	0,25
	Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của: $Q = \left(\frac{x}{x+y} \right)^4 + \left(\frac{y}{y+z} \right)^4 + \left(\frac{z}{z+x} \right)^4$.	1,0
	Ta có $Q = \left(\frac{x}{x+y} \right)^4 + \left(\frac{y}{y+z} \right)^4 + \left(\frac{z}{z+x} \right)^4 = \left(\frac{1}{1+\frac{y}{x}} \right)^4 + \left(\frac{1}{1+\frac{z}{y}} \right)^4 + \left(\frac{1}{1+\frac{x}{z}} \right)^4$ Đặt $a = \frac{y}{x}; b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z}$ với $a, b, c > 0$ Khi đó $Q = \left(\frac{1}{1+a} \right)^4 + \left(\frac{1}{1+b} \right)^4 + \left(\frac{1}{1+c} \right)^4$. với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$	0,25
9	Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có $P \geq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \right]^2 \quad (1)$ $\left[1 + (\sqrt{ab})^2 \right] \left[1 + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2 \right] \geq (1+a)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{b}{(1+ab)(a+b)}$ Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{(1+ab)(a+b)}$ Suy ra $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \quad (2)$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$	0,25
	Áp dụng (2) ta được: $\frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+1)^2} \geq \frac{1}{1+c} \Rightarrow \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{1}{1+c} - \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+c} - \frac{1}{4} = \frac{c}{1+c} + \frac{1}{1+c} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	0,25
	Do đó $Q \geq \frac{3}{16}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1 \Rightarrow x = y = z$ Giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{3}{16}$ khi $x = y = z$	0,25