

MÔN: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt{x}} + \frac{x-3}{x-\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}}{x+5\sqrt{x}+6}$ (với $x > 0, x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức P.
b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $P \leq 20$?

Câu 2. (1,5 điểm) Cho hai túi I và II, trong đó túi I chứa 6 tấm thẻ được ghi các số 1; 2; 3; 4; 5; 6 và túi II chứa 8 tấm thẻ được ghi các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số, trong đó chữ số trên tấm thẻ rút từ túi I là chữ số hàng chục.

- a) Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố A: “Số tạo thành có tổng các chữ số bằng 6”.
b) Tính xác suất của biến cố B: “Số tạo thành có chữ số hàng chục nhỏ hơn hai lần chữ số hàng đơn vị”.

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $5x^2 + (3x-1)\sqrt{x^2-2x+5} = 4x+5$.
b) Một xe tải đi từ A đến B, quãng đường AB dài 140km. Sau khi xe tải đi được 36 phút, một xe khách bắt đầu đi từ B về A và gặp xe tải sau đó 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết thời gian xe tải đi từ A đến B nhiều hơn thời gian xe khách đi từ B về A là 28 phút.

Câu 4. (1,5 điểm)

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(0;1) và hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P). Một đường thẳng d qua A, cắt (P) tại hai điểm phân biệt B, C và cắt trục hoành tại D sao cho

$$OB^2 + OC^2 = 10OD^2. \text{ Tính } \frac{BC}{AD}.$$

- b) Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 - 3y^2 - z^2 = xy + 3xz - 8yz$.
Chứng minh rằng $5x + 19y + 15z$ chia hết cho 44.

Câu 5. (2,5 điểm) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M, tiếp tuyến của (O) tại M cắt AB, AC lần lượt tại E và F, phân giác góc FEA cắt OA tại I. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ I lên AE.

- a) Chứng minh các điểm O, B, A, C cùng nằm trên một đường tròn và $AK = \frac{1}{2}(AE + AF - EF)$.

b) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $OB = 6\text{cm}$ và $EF = 7\text{cm}$. Tính diện tích tam giác MBC.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Gọi P là một điểm thay đổi trên cạnh AC (P không trùng A, C). Đường thẳng qua P, vuông góc với đường thẳng AB và cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng qua K, vuông góc với đường thẳng AC và cắt đường thẳng AB tại Q. Gọi M là trung điểm đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng khi điểm P thay đổi, đường thẳng KM luôn qua một điểm cố định.