

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1: (2 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{6\sqrt{x}-4}{1-x}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm giá trị của x để $P = -1$
- c) So sánh P với 1

Bài 2: (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc của xe khách là 20 km/h. Do đó nó đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100km.

Bài 3: (2 điểm) Cho hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$ có đồ thị là parabol (P)

- a) Xác định a để parabol (P) đi qua điểm $A(-1;1)$
- b) Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được ở câu trên.
- c) Cho đường thẳng (d): $y = 2x + 3$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) với hệ số a tìm được ở câu a.
- d) Tính diện tích tam giác AOB với $A; B$ là giao điểm của (d) và (P).

Bài 4: (3,5 điểm) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung.

Kẻ OH vuông góc với đường thẳng d tại H . Lấy điểm M bất kì thuộc d . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn $(O;R)$. Nối AB cắt OH, OM lần lượt tại K và I .

- a) Chứng minh 5 điểm M, H, A, O, B cùng thuộc một đường tròn
- b) Chứng minh $OK.OH = OI.OM$
- c) Chứng minh khi M di chuyển trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định
- d) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5 (0,5 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x + 3\sqrt{x-2}}{x + 4\sqrt{x-2} + 1}$

HƯỚNG DẪN

Bài 1: (2 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{6\sqrt{x}-4}{1-x}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm giá trị của x để $P = -1$
- c) So sánh P với 1

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} a) P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{6\sqrt{x}-4}{1-x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{6\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-1) - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$b) P = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = -\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$c) \text{ Ta có } P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1} < 0 \text{ với mọi } x \geq 0; x \neq 1.$$

Bài 2: (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc của xe khách là 20 km/h. Do đó nó đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100km.

Hướng dẫn

$$\text{Đổi: } 50 \text{ phút} = \frac{5}{6} \text{ giờ}$$

Gọi vận tốc của xe khách và xe du lịch lần lượt là x, y (km/h) ($x, y > 0$).

Thời gian xe khách đi hết quãng đường AB là $\frac{100}{x}$ giờ

Thời gian xe du lịch đi hết quãng đường AB là $\frac{100}{y}$ giờ

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} y - x = 20 \\ \frac{100}{x} - \frac{100}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ 100 \cdot \frac{y - x}{xy} = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 20 \\ xy = 2400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 20 \\ x(x + 20) = 2400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 20 \\ (x - 40)(x - 60) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 & (TM) \Rightarrow y = 6 \\ x = -60 & (KTM) \end{cases}$$

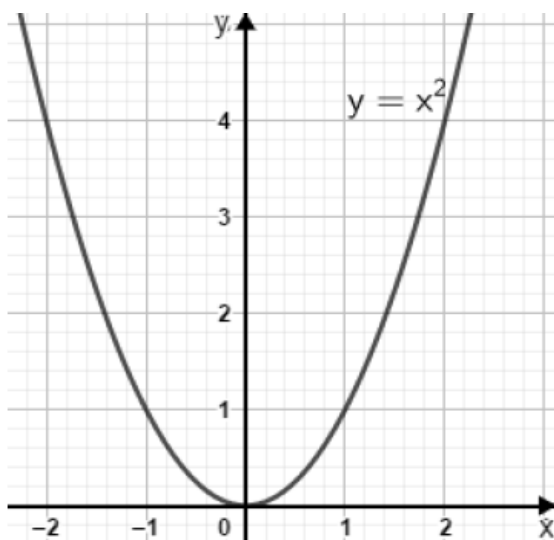
Vậy vận tốc của xe khách và xe du lịch lần lượt là 40 km/h và 60 km/h.

Bài 3: (2 điểm) Cho hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$ có đồ thị là parabol (P)

- Xác định a để parabol (P) đi qua điểm $A(-1;1)$
- Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được ở câu trên.
- Cho đường thẳng (d): $y = 2x + 3$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) với hệ số a tìm được ở câu a.
- Tính diện tích tam giác AOB với A; B là giao điểm của (d) và (P).

Hướng dẫn

- Vì parabol (P) đi qua điểm $A(-1;1)$ nên thay $x = -1, y = 1$ vào (P): $y = ax^2$, ta được: $1 = (-1)^2 \cdot a \Leftrightarrow a = 1$.
- Với $a = 1$, suy ra hàm số có dạng $y = x^2$.

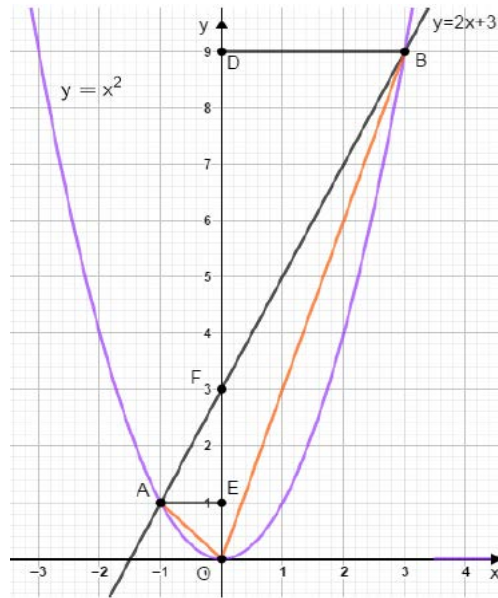


- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-1;1), (3;9)$.

-

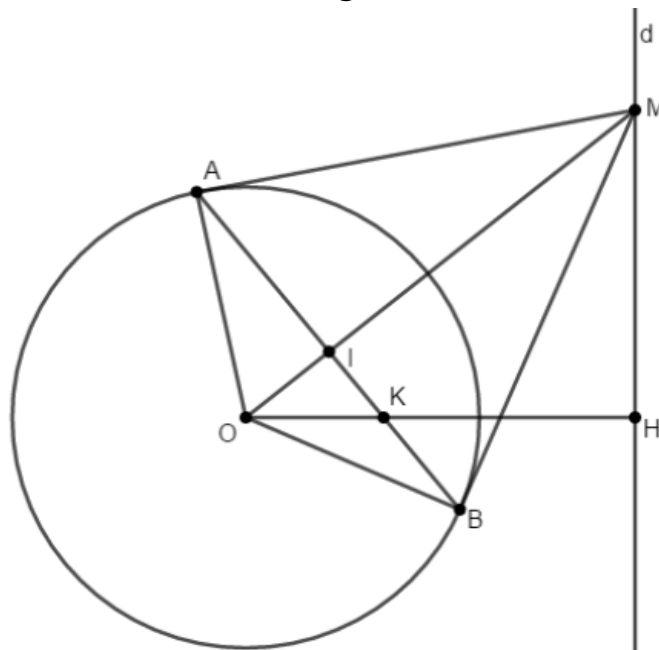


Ta có: $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBF} + S_{\triangle FOA} = \frac{1}{2} \cdot FO \cdot DB + \frac{1}{2} \cdot FO \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 6$ (đvdt)

Bài 4: (3,5 điểm) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O; R)$ không có điểm chung. Kẻ OH vuông góc với đường thẳng d tại H . Lấy điểm M bất kì thuộc d . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn $(O; R)$. Nối AB cắt OH, OM lần lượt tại K và I .

- Chứng minh 5 điểm M, H, A, O, B cùng thuộc một đường tròn
- Chứng minh $OK \cdot OH = OI \cdot OM$
- Chứng minh khi M di chuyển trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định
- Tìm vị trí của M để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn



- a) Ta có 5 điểm M, H, A, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM.
b) Vì MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $OM \perp AB$ tại I.

Suy ra tứ giác MIKH nội tiếp.

Do đó $\triangle OIK \sim \triangle OHM$ (g - g).

$$\text{Vậy } OK.OH = OI.OM$$

- c) Ta có $OK.OH = OI.OM \Leftrightarrow OK = \frac{OI.OM}{OH} = \frac{R^2}{OH}$ (do tam giác OBM vuông tại B, đường cao BI)

Vì OH cố định nên OK cố định.

Vậy K cố định hay khi M di chuyển trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.

- d) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có } S_{\triangle OIK} = \frac{1}{2}.OI.IK \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{OI^2 + IK^2}{2} = \frac{1}{4}OK^2.$$

Do OK cố định nên diện tích tam giác IOK đạt giá trị lớn là $\frac{1}{4}OK^2$, xảy ra khi $OI = OK$.

Khi đó tam giác OIK vuông cân tại I. Suy ra $\angle KOI = 45^\circ$, do đó tam giác OHM vuông cân tại H $\Rightarrow MH = MO$. Vậy điểm M thuộc đường thẳng d và thỏa mãn $MH = HO$ thì diện tích tam giác OIK lớn nhất.

Bài 5 (0,5 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x + 3\sqrt{x-2}}{x + 4\sqrt{x-2} + 1}$

Hướng dẫn

Đặt: $\sqrt{x-2} = t \geq 0, \forall x \Rightarrow x - 2 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 2$. Thay vào A ta được:

$$A = \frac{t^2 + 3t + 2}{t^2 + 4t + 3} = \frac{(t+1)(t+2)}{(t+1)(t+3)} = \frac{t+2}{t+3} = 1 - \frac{1}{t+3} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $t = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$, xảy ra khi $x = 2$.