

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)
Ngày kiểm tra: 28/12/2022

Bài I (2,0 điểm).

1) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48}$

b) $10\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}-2}$

2) Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4$

b) $x + 5\sqrt{x} - 36 = 0$

Bài II (2,0 điểm). Cho biểu thức: $A = \frac{2}{\sqrt{x}+6}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3x+4}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

2) Chứng minh: $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$

3) Tìm số nguyên tố x lớn nhất thỏa mãn $\frac{A}{B} < \frac{2}{3}$

Bài III (2,0 điểm). Cho hàm số bậc nhất $y = mx + 4$ (với $m \neq 0$) có đồ thị là đường thẳng (d)

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-1;3)$. Vẽ đồ thị hàm số ứng với m vừa tìm được.

2) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 5 - 2x$

3) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{8}$

Bài IV (3,5 điểm).

1. (0,5 điểm). Một cột đèn có bóng chiếu trên mặt đất dài 4,5m. Các tia sáng mặt trời chiếu qua đỉnh cột đèn tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 57° . Tính chiều cao của cột đèn (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

2. (3,0 điểm). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Vẽ đường tròn đường tâm A, bán kính AH. Từ điểm C kẻ tiếp tuyến CM với đường tròn (A, AH) (M là tiếp điểm, M không nằm trên đường thẳng BC).

a) Chứng minh bốn điểm A, M, C và H cùng thuộc cùng một đường tròn.

b) Gọi I là giao điểm của AC và MH. Kẻ đường kính MD của đường tròn (A). Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (A) và $BH \cdot HC = AI \cdot AC$

c) Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC cắt đường tròn (A) tại P và Q.

Chứng minh $PQ \parallel DM$.

Bài V (0,5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

..... **Hết**

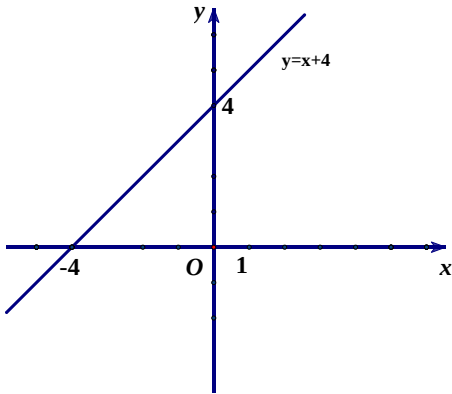
Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

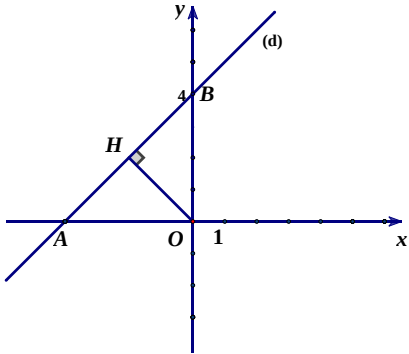
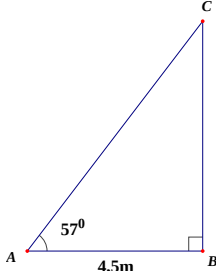
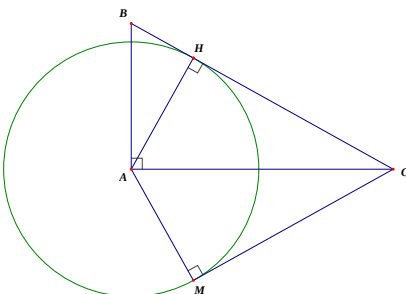
A. Hướng dẫn chung

- Nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.
- Trong mỗi bài, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các bước sau có liên quan không được điểm.
- Bài hình học bắt buộc phải vẽ đúng hình thì mới chấm điểm, nếu không có hình vẽ đúng ở phần nào thì giám khảo không cho điểm phần lời giải liên quan đến hình của phần đó.
- Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu, tính đến 0,25 điểm và không làm tròn.

B. Đáp án và thang điểm

Bài	ý	Đáp án	Điểm
Bài I (2,0 điểm)	1 (1 đ)	$\sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} - 2\sqrt{4^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \cdot 4\sqrt{3}$	0,25đ
		$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -\sqrt{3}$	0,25đ
		$10\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}-2} = 2\sqrt{5} - \frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = 2\sqrt{5} - 2(\sqrt{5}+2)$	0,25đ
		$= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 4 = -4$	0,25đ
	2 (1 đ)	a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} = 4 \Leftrightarrow x+1 = 4$	0,25đ
		TH1: $x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$ TH2: $x + 1 = -4 \Rightarrow x = -5$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3; -5\}$	0,25đ
		b) $x + 5\sqrt{x} - 36 = 0$. ĐK: $x \geq 0$ $(\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 4) = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 9 = 0 \\ \sqrt{x} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -9 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 16 \text{ (t/m)}$	0,25đ
		Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{16\}$	
Bài II (2,0 điểm)	1 (0,5đ)	$A = \frac{2}{\sqrt{x} + 6}$ với $x \geq 0; x \neq 4$	0,25đ
		Thay $x = 9$ (thỏa mãn ĐK) vào A ta có $A = \frac{2}{\sqrt{9} + 6} = \frac{2}{9}$	
		Vậy $x = 9$ thì $A = \frac{2}{9}$	0,25đ
	2 (1đ)	$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3x + 4}{x - 4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$	0,25đ
		$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{3x + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$	
		$B = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2x + 4\sqrt{x} - 3x - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$	0,25đ

		$B = \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25đ
		$B = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$	0,25đ
	3 (0,5đ)	Ta có $\frac{A}{B} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+6} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-6}{3(\sqrt{x}+6)} < 0$ với $x \geq 0; x \neq 4$ Vì $x \geq 0; x \neq 4$ nên $3(\sqrt{x}+6) > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 6 \Rightarrow x < 36$	0,25đ
		Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$ và x là số nguyên tố lớn nhất ta được $x = 31$. Vậy $x = 31$	0,25đ
Bài III (2,0 điểm) .	1 (1đ)	1) đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-1;3)$. Thay $x = -1; y = 3$ vào công thức $y = mx + 4$ ta có $3 = m \cdot (-1) + 4 \Leftrightarrow m = 1$ (t/m)	0,25đ
		Với $m = 1$ ta có hàm số $y = x + 4$	0,25đ
		Lập bảng và chỉ ra đồ thị của hàm số $y = x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm (0;4) và (-4; 0)	0,25đ
			0,25đ
		Vẽ chính xác đồ thị được	0,25đ
	2 (0,5đ)	2) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 5 - 2x$.	
		Để đường thẳng đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 5 - 2x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ 4 \neq 5 \end{cases}$	0,25đ
		$\Rightarrow m = -2$ (t/m) Vậy $m = -2$	0,25đ
	3 (0,5đ)	3) Tìm được giao điểm của đường thẳng (d) với trục Ox là $A\left(\frac{-4}{m}; 0\right)$ với trục Oy là $B(0;4) \Rightarrow OA = \frac{4}{ m }; OB = 4$ Kẻ $OH \perp AB$ ($H \in AB$) $\Rightarrow OH = \sqrt{8}$	0,25đ

		 Xét $\triangle OAB$ vuông tại O có đường cao OH $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \text{ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$	
		$\Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{m^2}{16} \Rightarrow m^2 = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} m = 1 & (t/m) \\ m = -1 & (t/m) \end{cases}$ Vậy $m \in \{-1; 1\}$	0,25đ
Bài IV (3,5 điểm) .	1. (0,5 điểm).	 Gọi chiều cao của cột đèn là BC, bóng của cột đèn trên mặt đất là AB Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $BC = AB \cdot \tan CAB$	0,25đ
		$\Rightarrow BC = 4,5 \cdot \tan 57^\circ \approx 6,9(m)$. Vậy chiều cao của cột đèn khoảng 6,9m	0,25đ
	2. (3,0 điểm).	Hình vẽ: 	0,25đ
	a.	a) Chứng minh: 4 điểm A, M, C, H cùng thuộc cùng một đường tròn.	(0,75)
		Xét đường tròn (A) có CM là tiếp tuyến của (A) $\Rightarrow CM \perp AM \Rightarrow \triangle AMC$ vuông tại M $\Rightarrow A, M, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AC	0,25đ
		$AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \triangle AHC$ vuông tại H $\Rightarrow A, H, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AC.	0,25đ

		Vậy bốn điểm A, M, C, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AC .	0,25đ
b		b) Gọi I là giao điểm của AC và MH. Kẻ đường kính MD của đường tròn (A). Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (A) và $BH.HC = AI.AC$	(1,5đ)
		Ta có $BAC = 90^\circ$ do $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow HAB + HAC = 90^\circ$ $MAD = 180^\circ \Rightarrow DAB + MAC = 90^\circ$ Mà $HAC = MAC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow DAB = HAB$	0,25đ
		Chứng minh $\triangle ADB = \triangle AHB$ (c.g.c) $\Rightarrow ADB = AHB \Rightarrow ADB = 90^\circ$	0,25đ
		$\Rightarrow BD \perp AD$ và D thuộc đường tròn (A) $\Rightarrow BD$ là tiếp tuyến của đường tròn (A)	0,25đ
		Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow AH^2 = BH.HC$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)	0,25đ
		C/m $HM \perp AC$ tại I	0,25đ
		Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có HI là đường cao $\Rightarrow AH^2 = AI.AC$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) $\Rightarrow BH.HC = AI.AC$	0,25đ
		c) Đường tròn tâm O đường kính BC cắt đường tròn (A) tại P và Q. Chứng minh $DM \parallel PQ$	(0,5đ)
c			
		Vì đường tròn (A) và (O) cắt nhau tại P và Q nên $AO \perp PQ$ tại N (tính chất đường nối tâm) (1)	0,25đ

		DBCM là hình thang vuông có $DA = DM; OB = OC \Rightarrow OA$ là đường trung bình của hình thang DBCM $\Rightarrow OA \parallel BD \parallel CM$ Mà $BD \perp DM$ $\Rightarrow OA \perp DM$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow DM \parallel PQ$	0,25đ
Bài V (0,5 điểm)		Bài 5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$	
		Theo bất đẳng thức Cô – si ta có $a + b^2 = a(a + b + c) + b^2 \geq 3ab + ac$ Áp dụng bất thức $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ ta có: $\frac{a}{a+b^2} \leq \frac{a}{3ab+ac} = \frac{1}{2b+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{b+c} \right) \leq \frac{1}{8b} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c} \right)$ Chứng minh tương tự, ta có $\frac{b}{b+c^2} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)$	0,25đ
		Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều, ta được điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$	0,25đ