

Tuyển tập ĐỀ ÔN THI LUYỆN THI
HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 CẤP QUẬN, HUYỆN

MỤC LỤC

Phần 1. Đề thi

Phần 2. Đáp án

• Đề 1:	Trang56
• Đề 2:	Trang59
• Đề 3:	Trang63
• Đề 4:	Trang65
• Đề 5:	Trang70
• Đề 6:	Trang73
• Đề 7:	Trang78
• Đề 8:	Trang82
• Đề 9:	Trang85
• Đề 10:	Trang88
• Đề 11:	Trang91
• Đề 12:	Trang95
• Đề 13:	Trang99
• Đề 14:	Trang102
• Đề 15:	Trang106
• Đề 16:	Trang109
• Đề 17:	Trang113
• Đề 18:	Trang115
• Đề 19:	Trang119
• Đề 20:	Trang123
• Đề 21:	Trang128
• Đề 22:	Trang131
• Đề 23:	Trang135
• Đề 24:	Trang138
• Đề 25:	Trang142
• Đề 26:	Trang145
• Đề 27:	Trang149
• Đề 28:	Trang153
• Đề 29:	Trang157
• Đề 30:	Trang162
• Đề 31:	Trang166
• Đề 32:	Trang170

• Đề 33:	Trang173
• Đề 34:	Trang179
• Đề 35:	Trang181
• Đề 36:	Trang184
• Đề 37:	Trang186
• Đề 38:	Trang190
• Đề 39:	Trang193
• Đề 40:	Trang197
• Đề 41:	Trang201
• Đề 42:	Trang205
• Đề 43:	Trang209
• Đề 44:	Trang212
• Đề 45:	Trang215
• Đề 46:	Trang219
• Đề 47:	Trang222
• Đề 48:	Trang225
• Đề 49:	Trang229
• Đề 50:	Trang233

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀNG HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 21/10/2014

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.
- Xét biểu thức: $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$, chứng tỏ $0 < Q < 2$.

Câu 2. (4,5 điểm)

- Không dùng máy tính hãy so sánh : $\frac{2014}{\sqrt{2015}} + \frac{2015}{\sqrt{2014}}$ và $\sqrt{2014} + \sqrt{2015}$.
- Tìm x, y, z, biết: $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 2y - 8z + 10 \leq 0$.
- Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{x+3}} + \sqrt{\frac{5}{x+4}} = 4$.

Câu 3. (4,0 điểm)

- Với $x = \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức: $B = (3x^3 + 8x^2 - 2)^{2015}$.
- Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) với $x > 1, y > 1$ sao cho $(3x+1) \vdots y$ đồng thời $(3y+1) \vdots x$.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- Chứng minh rằng:

Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC ; $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$.

- Chứng minh rằng : $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$
- Cho biết AH = k.HD. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = k + 1$.
- Chứng minh rằng: $\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{AC} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho x, y là các số tự nhiên khác 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |36^x - 5^y|.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THẠCH HÀ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

Câu 1. a) Tính giá trị của đa thức $f(x) = (x^4 - 3x + 1)^{2016}$ tại $x = 9 - \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} + \sqrt{5}}}$

b) So sánh $\sqrt{2017^2 - 1} - \sqrt{2016^2 - 1}$ và $\frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}}$

c) Tính giá trị biểu thức: $\sin x \cdot \cos x + \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$ với $0^\circ < x < 90^\circ$

d) Biết $\sqrt{5}$ là số vô tỉ, hãy tìm các số nguyên a, b thỏa mãn:

$$\frac{2}{a + b\sqrt{5}} - \frac{3}{a - b\sqrt{5}} = -9 - 20\sqrt{5}$$

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3}$

b) $x^2 - 5x + 8 = 2\sqrt{x-2}$

Câu 3. a) Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$

c) Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số.

Câu 4. a) Chứng minh rằng $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$

b) Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} = 2$

Tìm giá trị lớn nhất của tích $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Câu 5. Cho ΔABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi chân các đường vuông góc hạ từ D xuống AB, AC lần lượt là E và F

a) Chứng minh rằng: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

b) Giả sử $HD = \frac{1}{3} AD$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$

c) Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh rằng: 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KINH MÔN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2010-2011
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,5 điểm)

1. So sánh : $\frac{2008}{\sqrt{2009}} + \frac{2009}{\sqrt{2008}}$ và $\sqrt{2008} + \sqrt{2009}$

2. Cho biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2010}}$. Chứng minh rằng $B > 86$

Câu 2. (1,0 điểm)

Chứng minh biểu thức : $P = (x^3 - 4x - 1)^{2010}$ có giá trị là một số tự nhiên với

$$x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$$

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x-1} + 2 = x$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N. Tia AM cắt đường thẳng CD tại K. Kẻ AI vuông góc với AK cắt CD tại I

1. Chứng minh : $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2}$

2. Biết góc MAN có số đo bằng 45° , $CM + CN = 7$ cm, $CM - CN = 1$ cm. Tính diện tích tam giác AMN.

3. Từ điểm O trong tam giác AIK kẻ OP, OQ, OR lần lượt vuông góc với IK, AK, AI ($P \in IK, Q \in AK, R \in AI$). Xác định vị trí của O để $OP^2 + OQ^2 + OR^2$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 9.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀNG HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức : $B = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Tìm x để $B > 0$.

c. Tính giá trị của B khi : $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$

Câu 2. (4,0 điểm)

a. Giải phương trình : $\sqrt{x-1+4\sqrt{x-5}} + \sqrt{-1+x-4\sqrt{x-5}} = 4$

b. Chứng minh rằng: $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

Câu 3. (3,0 điểm)

a. Vẽ đồ thị hàm số: $y = |2x + 1|$.

b. Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số ở câu a với đồ thị hàm số $y = 3x - 5$.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $OM = ON$. Qua M và N vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C, E cùng thuộc một nửa đường tròn đường kính AB).

a. Chứng minh tứ giác CDFE là hình chữ nhật.

b. Cho $OM = \frac{2}{3}R$, góc nhọn giữa CD và OA bằng 60° .

Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

Câu 5. (2,0 điểm)

Một ngũ giác có tính chất: Tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh liên tiếp của ngũ giác đều có diện tích bằng 1. Tính diện tích ngũ giác đó.

Câu 6. (3,0 điểm)

a. Cho a, b, c là các số thực, chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

b. Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho $\begin{cases} \overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n - 2)^2 \end{cases}$

Với n là số nguyên lớn hơn 2.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH OAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (6 điểm)

Cho $P = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} \right) : \left(\frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$

1. Rút gọn P.
2. Tìm x để $P > 0$
3. Với $x > 4$, $x \neq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của $P.(x + 1)$

Câu 2. (4 điểm)

1. Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là 1 số chính phương.
2. Cho: $a > 0$, $b > 0$ và $ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \frac{4}{a + b}$$

Câu 3. (2 điểm)

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2012 - y} = \sqrt{2012} \\ \sqrt{2012 - x} + \sqrt{y} = \sqrt{2012} \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng: $x = y$
2. Tìm nghiệm của hệ phương trình.

Câu 4. (5 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Vẽ dây AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho $AM \perp AN$. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') với $B \in (O)$ và $C \in (O')$

1. Chứng minh $OM \parallel O'N$.
2. Chứng minh: Ba đường thẳng MN, BC, OO' đồng qui.
3. Xác định vị trí của M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Câu 5. (3 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao và ma, mb, mc lần lượt là trung tuyến của các cạnh BC, CA, AB; R và r lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{ma}{h_a} + \frac{mb}{h_b} + \frac{mc}{h_c} \leq \frac{R + r}{r}$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho: $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

Hết

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho $P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{|5-3x| - |x-1|}{x-3+|3+2x|} = 4$

2. Tìm số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Cho $a = x + \frac{1}{x}$ $b = y + \frac{1}{y}$ $c = xy + \frac{1}{xy}$

Tính giá trị biểu thức: $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

2. Chứng minh rằng với mọi $x > 1$ ta luôn có. $3(x^2 - \frac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \frac{1}{x^3})$

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tứ giác ABCD có $AD = BC$; $AB < CD$. Gọi I, Q, H, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD

1. Chứng minh IPHQ là hình thoi và PQ tạo với AD, BC hai góc bằng nhau.
2. Về phía ngoài tứ giác ABCD, dựng hai tam giác bằng nhau ADE và BCF. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, EF cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 5. (2,0 điểm) Tam giác ABC có $BC = 40\text{cm}$, phân giác AD dài 45cm đường cao AH dài 36cm . Tính độ dài BD, DC.

Câu 6. (2,0 điểm) Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b) = \frac{9}{4}$.

Hãy tìm GTNN của $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$

Hết

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (5 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a^6 - 2a^5 + a - 2}{a^5 + 1}$

Biết $\frac{a}{x+y} = \frac{5}{x+z}$ và $\frac{25}{(x+z)^2} = \frac{16}{(z-y)(2x+y+z)}$

b) Cho các số nguyên $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$

Chứng minh rằng: $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương

Câu 2. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$

Câu 3. (4 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a \geq c, b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

b) Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên.

Chứng minh rằng: Nếu $f(x) : 7$ với $\forall x \in \mathbb{Z}$ thì từng hệ số của $f(x)$ cũng $: 7$

Câu 4. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' , H là trực tâm

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$

c) Tam giác ABC như thế nào thì biểu thức $\frac{(AB+BC+CA)^2}{(AA')^2 + (BB')^2 + (CC')^2}$

đạt giá trị nhỏ nhất?

Câu 5. (2 điểm)

Cho hình vuông MNPQ, lấy điểm E thuộc cạnh MQ, điểm F thuộc cạnh NP sao cho: $ME = PF$. Các đường thẳng MF và NE cắt đường thẳng PQ lần lượt tại C và B. Kéo dài MB và NC cắt nhau tại A. Chứng minh rằng tam ABC là tam giác vuông.

Hết

Câu 1. (4,0 điểm) Cho $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. (4,5 điểm)

a) Tính $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$

b) Cho $x^2 - x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2015}{x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2015}$.

c) Giải phương trình: $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} = 6\sqrt{2}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm số nguyên dương n bé nhất để $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$ chia hết cho 125.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ thì số $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$ và $AE \cdot BF \cdot CD = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

b) $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD}{HD}$.

c) H là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

d) $\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot BA} + \frac{HA \cdot HB}{CA \cdot CB} = 1$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 2015$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

Hết

Câu 1. (5 điểm)

1. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

2. Áp dụng tính tổng:

$$S_{2018} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2018\sqrt{2017} + 2017\sqrt{2018}}$$

3. Viết công thức tổng quát tính S_n ? cho biết với những giá trị nào của n thì ta được kết quả S_n là số hữu tỉ?

Câu 2. (5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$

2. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $10x^2 + y^2 + z^2 < 2x + 4y + 6xz - 4$

Câu 3. (4 điểm)

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác.

Chứng minh: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

Câu 4. (4 điểm)

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

1. Chứng minh: $DE = CF$.

2. Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

3. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 5. (2 điểm) Cho hình vuông ABCD và 2018 đường thẳng thỏa mãn hai điều kiện:

1. Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2. Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Hết

Đề số 10

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = (x^2 - x - 1)^{2018} + 2019$.

Tính giá trị biểu thức A khi $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

b) Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2019})(y + \sqrt{y^2 + 2019}) = 2019$. Chứng minh: $x^{2019} + y^{2019} = 0$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2(x^2 + 1) + 2x - 1$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2019}$.

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Tìm ba chữ số tận cùng của tích mười hai số nguyên dương đầu tiên.

b) Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Chứng minh rằng $a + b + c \geq 0$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$, vẽ hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn CA lấy G sao cho $GC = \frac{1}{3}AC$. Tia OG cắt BC tại M , vẽ ON vuông góc với BG ($N \in BG$).

a) Chứng minh MA là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$;

b) Tia CN cắt đường tròn tại K . Tính $KA^4 + KB^4 + KC^4 + KD^4$ theo R ;

c) Chứng minh $MN = 2R$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong một cuộc họp có 6 người. Người ta nhận thấy cứ ba người bất kỳ thì có hai người quen nhau. Chứng minh rằng thế nào cũng có ba người đôi một quen nhau.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN CẨM THỦY

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 21/10/2014

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1.

Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x - \sqrt{x}} + \frac{2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x + 2}{(\sqrt{x} - 1)(x + 2\sqrt{x})}$.

d. Rút gọn P.

e. Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$

f. Tìm x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2.

Giải phương trình:

a) $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4}$ b) $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$

Câu 3.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Cho $x > 1$ và $y > 0$. Chứng minh: $\frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} \geq 3\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y}\right)$

c) Tìm số tự nhiên n để $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố

Câu 4.

Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C và D). Đường thẳng AE cắt BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a) Chứng minh $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ không đổi

b) Chứng minh $\cos AKE = \sin EKF \cdot \cos EFK + \sin EFK \cdot \cos EKF$

c) Lấy M là trung điểm của AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Câu 5.

Cho ABCD là hình bình hành. Đường thẳng d đi qua A không cách hình bình hành, ba điểm H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, C, D trên d. Xác định vị trí của d để tổng: $BH + CI + DK$ có giá trị lớn nhất.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRIỆU SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 12

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 28/11/2012

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm m để có x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+3)=m$.

2. Cho hàm số: $f(x) = (x^3 + 6x - 7)^{2012}$. Tìm $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 5x + 9 = (x+5)\sqrt{x^2+9}$.

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2012}$ và $\frac{13}{x} - \sqrt{2012}$ đều là số nguyên.

2. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

Nếu $x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ thì trong ba số x, y, z có duy nhất một số lớn hơn 1.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong tam giác ABC.

a) Giả sử $\angle BPC = 135^\circ$. Chứng minh rằng $AP^2 = CP^2 + 2BP^2$.

b) Các đường thẳng AP và CP cắt các cạnh BC và AB tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong tam giác ABC, đường thẳng PQ luôn đi qua D.

2. Cho tam giác ABC, lấy điểm C_1 thuộc cạnh AB, A_1 thuộc cạnh BC, B_1 thuộc cạnh AC. Biết rằng độ dài các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 không lớn hơn 1.

Chứng minh rằng $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC).

Câu 5. (2,0 điểm)

Với x, y là những số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}$$

Hết

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$. (với

$x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Với giá trị của x ta có $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$.

b) Cho các số thực $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 6$. Tính giá trị

biểu thức $P = x^{2017} + y^{2018} + z^{2019}$.

Câu 3. (1,5 điểm) a) Chứng minh rằng $A = n^2 + n + 2$ không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n .

b) Có tồn tại hay không các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$2016x^{2017} + 2017y^{2018} = 2019.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến PA và PB với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC của đường tròn $(O; R)$.

a) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm của AH ;

b) Cho $OP = m$. Tính độ dài AH theo R và m ;

c) Đường thẳng d đi qua P sao cho khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $R\sqrt{2}$, đường thẳng vuông góc với PO tại O cắt tia PB tại M . Xác định vị trí của điểm P trên đường thẳng d để diện tích tam giác POM đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo R ?

Câu 5. (1,25 điểm) a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh

rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$.

b) Cho các số 1; 2; 3; 4;...; 2018 được viết trên một cái bảng. Bạn được phép thay thế bất cứ hai trong các số này bởi một số mà hoặc tổng hoặc hiệu bằng hiệu của các số đó. Chỉ ra rằng sau 2017 lần thực hiện phép toán này, số duy nhất còn lại trên bảng không thể là số 0.

Hết

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4}$.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng nó là một số chính phương, chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

b) Cho ba số nguyên dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a + b + c)^3}{abc} \geq 28.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O; R) và dây cung $AH < R$. Qua H vẽ đường thẳng d tiếp xúc với (O; R). Vẽ đường tròn (A; R) cắt đường thẳng d tại B và C sao cho H nằm giữa B và C. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$).

a) Chứng minh $MN \perp OA$;

b) $OB \cdot OC = 2R^2$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi.

Câu 5. (1,0 điểm) Chứng minh rằng bất kỳ một tam giác nhọn nào có diện tích bằng 1 cũng có thể đặt được trong một tam giác vuông có diện tích không quá $\sqrt{3}$ (Ta nói: Tam giác ABC đặt trong tam giác MNP nếu mọi điểm thuộc tam giác ABC đều không nằm ngoài tam giác MNP).

Hết

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}.$$

- Tìm điều kiện của x, y để biểu thức P xác định và rút gọn P ;
- Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

Câu 2. (2,0 điểm)

- Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x + 6} + \sqrt{x^2 + x + 2} = x + \frac{4}{x}$.
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$.

Câu 3. (2,0 điểm)

- Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{a56b}:45$.
- Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của $(O; R)$ (B, C là tiếp điểm). Từ B vẽ đường kính BD của $(O; R)$, đường thẳng AD cắt $(O; R)$ tại E (khác D).

- Chứng minh $AE \cdot AD = AH \cdot AO$;
- Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh AD tại K và cắt đường thẳng BC tại F . Chứng minh rằng FD là tiếp tuyến của $(O; R)$;
- Gọi I là trung điểm của cạnh AB , qua I vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh AO tại M và đường thẳng này cắt đường thẳng DF tại N . Chứng minh $NA = ND$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho hình H gồm ngũ giác lồi có tất cả các góc là góc tù và tất cả các điểm nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại hai đường chéo của ngũ giác sao cho hai hình tròn có đường kính là các đường chéo đó phủ kín hình H (Ta nói: Hai hình tròn phủ kín hình H nếu mọi điểm thuộc hình H đều thuộc ít nhất một trong hai hình tròn nói trên)

Hết

Đề số 16

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ với

$x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

2) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 21$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \sqrt{\frac{(a^2+6)(b^2+6)}{c^2+6}} + \sqrt{\frac{(b^2+6)(c^2+6)}{a^2+6}} + \sqrt{\frac{(c^2+6)(a^2+6)}{b^2+6}}$

Câu 2. (2 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + 2015x - 2014 = 2\sqrt{2017x - 2016}$

2) Cho hàm số $y = (m-1)x + 2m - 3$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).

Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn tâm O (O là gốc tọa độ Oxy) bán kính 2cm (đơn vị trên trục tọa độ là cm).

Câu 3. (2 điểm)

1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

2) Tìm số hữu tỉ a, b biết phương trình : $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ có một nghiệm là $x = 1 + \sqrt{2}$

Câu 4. (3 điểm)

Cho nửa (O) đường kính BC=2R, A là điểm bất kì trên nửa đường tròn (A không trùng với B, C). Kẻ $AH \perp BC$, gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB và AC.

a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ và $EF^3 = BE \cdot CF \cdot BC$

b) Gọi I là điểm đối xứng với H qua AB. Chứng minh IA là tiếp tuyến của (O).

c) Tìm vị trí điểm A trên nửa đường tròn sao cho diện tích tam giác AHB đạt giá trị lớn nhất ?

Câu 5. (1 điểm)

Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{2ab}$$

Hết

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức $M = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

- Rút gọn biểu thức M.
- Tính giá trị của M với $x = 9 - 4\sqrt{2}$.
- Chứng minh $M < \frac{1}{3}$.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho đường thẳng: $y = (m - 2)x + 3$ (m là tham số) (d).

- Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng : $y = 2x - 1$
- Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.
- Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1.

Câu 3. (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

- $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1$
- $\sqrt{x^2-1} = x+1 + \sqrt{x+1}$

Câu 4. (2,0 điểm) Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^2y + xy - x = 4.$$

Câu 5. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, HB = 2cm, HC = 4,5cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ các tiếp tuyến BM, CN với đường tròn (M và N là các tiếp điểm, khác điểm H).

- Chứng minh rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.
- Tính diện tích tứ giác BMNC.
- Gọi K là giao điểm của CN và HA. Tính các độ dài AK, KN.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + 2z$.

Hết

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = x^2(x+1) - y^2(y-1) + xy - 3xy(x-y+1) + 1974$$

$$\text{Biết } x - y = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$$

2) Chứng minh rằng:

Nếu a, b, c là các số không âm thỏa mãn điều kiện: $b = \frac{a+c}{2}$ thì ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình (ẩn x): $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y) = 60 \\ (y+x)(y+2x)(y+3x) = 105 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn: $(a-\sqrt{2011})(b+\sqrt{2011}) = 14$

2) Cho $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$, k là số nguyên

Tìm điều kiện của k để số N chia hết cho 16.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai đường kính AB và MN bất kì. Đoạn BM và BN kéo dài cắt tiếp tuyến ở A của đường tròn tại hai điểm tương ứng là C và D , gọi P, Q là trung điểm của CA và DA .

- Chứng minh tứ giác $MNDC$ nội tiếp.
- Đường cao BI của tam giác BPQ cắt OA tại E . Chứng minh E là trung điểm của OA .
- Đường kính AB cố định, đường kính MN thay đổi. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BPQ theo R .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn : $a+b+c=0$ và $-1 < a \leq b \leq c < 1$

Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 < 2$

Hết

Đề số 19

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

- Tìm ĐKXĐ và rút gọn P
- Tìm x để $P < 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

- Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$.
- Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng $(a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

Câu 3. (4,0 điểm)

- Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương
- Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$
Chứng minh $A = xy$ chia hết cho 12

Câu 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, ba đường cao AA', BB', CC'.

- Chứng minh $\Delta AC'C \sim \Delta AB'B$
- Trên BB' lấy M, trên CC' lấy N sao cho $AMC = ANB = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.
- Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC và tam giác A'B'C'.

Chứng minh rằng $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{S'}{S}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y \geq \frac{34}{35}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3x + 4y + \frac{2}{5x} + \frac{8}{7y}$$

Hết

Đề số 20

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{2}{1-4x} \right) \cdot \frac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{9}$ Tìm các

giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

b) Cho $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{2015} - x^{2016} + 2017$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$

b) Tìm các cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $5x - 3y = 2xy - 11$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số.

b) Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2cm. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, DC . Gọi I, H thứ tự là giao điểm của AF với BE, BD . Vẽ $\widehat{BIM} = 45^\circ$ (M thuộc cạnh BC), O là giao điểm của IM và BD .

a) Tính độ dài của AI, BI .

b) Chứng minh 4 điểm B, I, H, M cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh $DH \cdot BO = OH \cdot BD$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Hết

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN CẨM GIÀNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right)$, với $a \geq 0$

Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2016 - 2\sqrt{2015}$.

b) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{56}{54}}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{56}{54}}}$ là một số nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

b) $(x^2 + 2x)^2 - 2x^2 - 4x = 3$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho $S = 4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98}$. Chứng tỏ S không phải là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $2x^2 + y^2 + 4x = 4 + 2xy$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho $\angle GOH = 45^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh: $\angle DOH = \angle BGO$ và $HD \cdot BG = OB \cdot OD$.

b) Chứng minh: $HD \cdot BG = MB \cdot AD$ và $MG \parallel AH$.

c) Đường thẳng qua D cắt AB, BC lần lượt tại E và F (E và A nằm cùng phía đối với B, F và C nằm cùng phía đối với B). Chứng minh: $\frac{\sqrt{2}}{BD} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BF}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y, z dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$. CMR: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2015}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2014}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2013}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015 \cdot 1}}$ với số $\frac{2015}{1008}$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN LÊ CHÂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 22

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a + b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ($a > b > 0$)

Chứng minh rằng khi $a - b = 1$ thì $P \geq 2\sqrt{2} + 2$.

b) Cho $x_0 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + 8x - 1 = 2(2x + 1)\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{2}$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x(1 + x + x^2) = 4y(y + 1)$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Cho ΔABC có $A = 60^\circ$. Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$.

2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Kẻ tiếp tuyến chung MN, $M \in (O)$, $N \in (O')$. Qua A kẻ đường thẳng song song với MN cắt (O) và (O') lần lượt tại C, D. Hai đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Hai đường thẳng BM và BN cắt CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $EP = EQ$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn: $(x-1)(y-1) \geq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{x^2y + xy^2}{(x^2 + y^2 + 8)^2 \cdot \sqrt{1 + x^2y^2}}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Xét tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 19791126\}$, tô màu các phần tử của X bằng một trong 7 màu: đỏ, cam, vàng, lục, lam, trà, tím. Chứng minh rằng tồn tại ba phần tử phân biệt a, b, c của X cùng màu sao cho a, b, c lớn hơn 1 và $2019^a + 1$ là bội của $2019^b + 1$; $2019^b + 1$ là bội của $2019^c + 1$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KINH MÔN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 23

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2.0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau:

$$1) M = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}.$$

$$2) Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \quad \text{với } x > 1; x \neq 2$$

Câu 2. (2.0 điểm)

$$1) \text{ Giải phương trình: } (x+4)\sqrt{x^2+7} = x^2+4x+7$$

$$2) \text{ Cho } M = \frac{2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5} \text{ tìm số hữu tỉ } a \text{ để } M \text{ nguyên}$$

Câu 3. (2.0 điểm)

$$1) \text{ Tìm số nguyên dương } x, y \text{ thỏa mãn: } x = \sqrt{2x(x-y)+2y-x+2}$$

$$2) \text{ Cho } a, b \text{ là số nguyên thỏa mãn: } 2a^2 + 3ab + 2b^2 \text{ chia hết cho } 7. \text{ Chứng minh rằng } a^2 - b^2 \text{ chia hết cho } 7.$$

Câu 4. (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$) đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn thẳng BE theo $m = AB$.

2) Gọi M là trung điểm của của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo góc AHM.

$$3) \text{ Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: } \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

Câu 5. (1.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \sqrt{\frac{a}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a+2b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b+2c}}.$$

Hết

Đề số 24

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \quad \text{Với } x > 0; \quad x \neq \frac{1}{4}; \quad x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x = 17 - 12\sqrt{2}$ c) So sánh A với $\sqrt{A}$.

Câu 2. (3,5 điểm) Chứng minh rằng:

a) $2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < \frac{1}{\sqrt{b}} < 2(\sqrt{b} - \sqrt{c})$ Biết a; b; c là 3 số thực thỏa mãn điều kiện:

$$a = b + 1 = c + 2; \quad c > 0.$$

b) Biểu thức $B = \sqrt{1 + 2008^2} + \frac{2008^2}{2009^2} + \frac{2008}{2009}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Câu 3. (3,0 điểm) Giải phương trình

$$a) \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$b) \sqrt{4x + 1} - \sqrt{3x - 2} = \frac{x + 3}{5}.$$

Câu 4. (8,0 điểm)

Cho AB là đường kính của đường tròn (O;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O;R) tại M, MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O;R).

c) Chứng minh K là trung điểm của CH.

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Câu 5. (1,5 điểm) Cho $M = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2008} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2008}$

a) Chứng minh rằng M có giá trị nguyên.

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TIỀN HẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 25

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A = \frac{3}{2}$.

2. Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ thì $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + 5y = 0$.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a - b\sqrt{2}}{b - c\sqrt{2}} \text{ là số hữu tỉ và } a^2 + b^2 + c^2 \text{ là số nguyên tố}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + m + 1$ (m là tham số)

a) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

b) Trên parabol (P) lấy 3 điểm phân biệt: A(a, a²), B(b, b²), C(c, c²).

Biết rằng $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$.

Tính giá trị của biểu thức: $M = (a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1)$.

2. Giải phương trình: $x^2 - x - 1 = \sqrt{8x + 1}$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M khác C và D. Đường tròn đường kính AM cắt cạnh AB tại điểm N khác A. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn đường kính AM tại E khác D.

a) Chứng minh rằng ba điểm C, E, N thẳng hàng.

b) Gọi giao điểm của đoạn thẳng MN với DE là H, đoạn thẳng NM cắt đường tròn đường kính CD tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = MH \cdot MN$.

c) Gọi F là giao điểm của DE với cạnh BC. Chứng minh rằng $MF \perp AC$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện:
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ BẮC GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 26

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (5 điểm)

a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

b/ Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Câu 2. (4 điểm)

a/ Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Câu 3. (4 điểm)

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$

Câu 4. (6 điểm)

Cho đoạn thẳng $OA = R$, vẽ đường tròn $(O; R)$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy H bất kỳ sao cho $AH < R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$)

a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Hết

Đề số 27

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (6 điểm)

a. Cho biểu thức $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1) Rút gọn M

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

b. Tính giá trị của biểu thức P

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}$$

Câu 2. (4 điểm)

a - Giải phương trình: $\sqrt{(1+x^2)^3} - 4x^3 = 1 - 3x^4$

b - Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2014$ là một số chính phương

Câu 3. (4 điểm)

a) Cho đường thẳng: $(m-2)x + (m-1)y = 1$ (m là tham số) (1)

Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m

b) Chứng minh rằng: nếu a, b, c là ba số thỏa mãn $a + b + c = 2013$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2013}$ thì một trong ba số phải có một số bằng 2013

Câu 4. (5 điểm)

Cho đường tròn (O; R). AB và CD là hai đường kính cố định của (O) vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

a) Tính $\sin^2 MBA + \sin^2 MAB + \sin^2 MCD + \sin^2 MDC$

b) Chứng minh: $OK^2 = AH(2R - AH)$

c) Tìm vị trí điểm H để giá trị của: $P = MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD$ lớn nhất.

Câu 5. (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{a+c-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA LỘC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 28

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

Rút gọn biểu thức:

$$1) \quad A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

$$2) \quad B = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải phương trình:

$$1) \quad 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$2) \quad 2\sqrt{3x+10} = x^2 + 9x + 20$$

Câu 3. (2,0 điểm)

$$1) \text{ Giải phương trình nghiệm nguyên : } x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0$$

2) Tìm số nguyên tố k để $k^2 + 4$ và $k^2 + 16$ đồng thời là các số nguyên tố.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

1) Chứng minh tam giác OME vuông cân.

2) Chứng minh ME // BN.

3) Gọi H là giao điểm của OM và BN. Chứng minh CH $\perp$ BN.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VŨ QUANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 29

(Đề thi có một trang)

Câu 1.

a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^3 + y^3 - 6(x^2 + y^2) + 13(x + y) - 20 = 0$.

Tính giá trị của $A = x^3 + y^3 + 12xy$.

b) Cho biểu thức $x^2 - x - 1 = 0$. Tính giá trị của $Q = \frac{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2017}{x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2017}$.

c) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$.

Câu 2.

a) Cho biểu thức $B = \frac{2}{a} - \left(\frac{a^2}{a^2 - ab} + \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{b^2}{b^2 - ab} \right) : \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}$.

Rút gọn và tính giá trị của B với $|2a - 1| = 1$ và $|b + 1| = \frac{1}{2}$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số cao nhất bằng 1.

Biết $P(2015) = 2016$; $P(2016) = 2017$; $P(2017) = 2018$.

Tính $P(2014) + P(2018)$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\frac{1}{x^2 + 5x + 4} + \frac{1}{x^2 + 11x + 28} + \frac{1}{x^2 + 17x + 70} = \frac{3}{4x - 2}$.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - xy + y^2 = 3$.

Câu 4.

a) Tìm x, y để biểu thức $F = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n + 3^n + 4^n$ là số chính phương.

Câu 5.

a) Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, N là trung điểm của CD , G là trọng tâm tam giác BMN , I là giao

điểm của AG và BC . Tính $\frac{AG}{GI}$ và $\frac{IB}{IC}$.

b) Cho tam giác ABC , phân giác trong góc A cắt BC tại D , trên các đoạn thẳng DB , DC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $EAD = FAD$. Chứng minh rằng $\frac{BE \cdot BF}{CE \cdot CF} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

c) Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng đường chéo AC , trên tia đối của tia AD lấy điểm E . Đường thẳng EB cắt đường thẳng DC tại F , CE cắt AF tại O . Chứng minh rằng $\triangle AEC \sim \triangle CAF$, tính số đo $\angle EOF$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN BẮC TỪ LIÊM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 30

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức:

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 + \sqrt{5}$; $y = 3 - \sqrt{5}$

2. Cho 2 biểu thức: $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$; $Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}$ với $a, b, c \neq 0$

thỏa mãn: $a \neq b \neq c$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh rằng: $P \cdot Q = 9$

Câu 2. (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x \left(\frac{5-x}{x+1} \right) \left(x + \frac{5-x}{x+1} \right) = 6$

b) $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x-1$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

b) Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Câu 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC > AB$, đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

a) Chứng minh: $\triangle ADC \sim \triangle BEC$. Cho $AB = m$, tính BE theo m .

b) Gọi M là trung điểm của BE . Chứng minh rằng: $\triangle BHM \sim \triangle BEC$. Tính góc AHM .

c) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh rằng: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN LỤC NAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 31

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$, với $x > 0; y > 0; xy \neq 1$.
2. Cho $x = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị biểu thức $P = (x^2 + 4x - 2)^{2017}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là một nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + 1 = 0$. Với a, b là các số hữu tỉ. Tìm a và b .
2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20} - 1$ chia hết cho 100.
3. Cho a, b, c là độ dài của 3 cạnh một tam giác, chứng minh rằng:
- $$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x sao cho $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương.
2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x} + 2\sqrt{x+2} = 2x + \sqrt{x + \frac{6}{x} + 5}$.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD = a$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N , trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $AN + DK = 2a$. Gọi giao điểm của CN với BD và AD thứ tự là I và M . Tia BM cắt ND tại P .

1. Chứng minh $IC \cdot CN = IN \cdot CM$.
2. Chứng minh $DM \cdot BN = a^2$. Từ đó tính số đo góc BPD .
3. Tìm vị trí điểm N và K để diện tích tứ giác $ADKN$ lớn nhất.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KIM THÀNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 32

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a, Rút gọn biểu thức A .

b, Chứng minh rằng: $0 < A \leq 2$.

2. Cho biểu thức: $\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$ với $-2 < x < 2$ và $x \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x+2}{x-2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$.

2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x - m^2 - 2m$;

$(d_2): y = (m-2)x - m^2 - m + 1$ cắt nhau tại G . (Với m là tham số)

a, Xác định tọa độ điểm G .

b, Chứng tỏ rằng điểm G luôn thuộc một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Câu 3. (2,0 điểm)

a, Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1 : 24$.

b, Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

c, Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , đường thẳng (d) cố định nằm ngoài đường tròn. M di động trên đường thẳng (d) , kẻ 2 tiếp tuyến MA và MB với đường tròn $(O; R)$, OM cắt AB tại I .

a, Chứng minh tích $OI \cdot OM$ không đổi.

b, Tìm vị trí của M để $\triangle MAB$ đều.

c, Chứng minh rằng khi M di động trên (d) thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leq \frac{9}{4}$$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀI NHƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 33

(Đề thi có 2 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Thu gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

b) Cho $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = (1 - 2x + x^2 + x^3 - x^4)^{2018}.$$

c) Cho $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$C = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2018.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

b) Chứng minh rằng số tự nhiên

$$A = 1.2.3....2017.2018. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} \right) \text{ chia hết cho } 2019.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c \geq a, c \geq b$ thì $c \geq a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E = x^2 + y^2 + z^2$.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$. Đặt $AM = x$ và $AN = y$. Chứng minh rằng:

a) $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$.

b) $MN = a - x - y$.

c) MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , gọi M là trung điểm của cạnh BC , H là trực tâm của tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Tính diện tích của tam giác ABC , biết $OM = OK = \frac{KM}{4}$ và $AM = 30$ cm.

_____Hết_____

Đề số 34

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x = 38 - 6y^2$.

b) Tìm số tự nhiên n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho $\left(x + \sqrt{x^2 + 2015}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2015}\right) = 2015$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x + y + 2016$.

b) Chứng minh rằng:

Nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases}$$

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ và $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$.

b) Chứng minh rằng: $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$.

c) Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho chu vi $\triangle DEF$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}.$$

Hết

Đề số 35

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $p = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

2. Cho $a = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$. Chứng minh rằng: $\frac{64}{(a^2 - 3)^3} - 3a$ là số nguyên

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình : $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$.

2. Nhà toán học De Morgan (1806 – 1871) khi được hỏi tuổi đã trả lời: Tôi x tuổi vào năm x^2 . Hỏi năm x^2 đó ông bao nhiêu tuổi.

3. Tìm số tự nhiên A biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A + 51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của A là số 1.

c) $A - 38$ là số chính phương.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm x và y biết $2x^2 + 4x - 3y^3 + 5 = 0$ và $x^2y^2 + 2xy + y^2 = 0$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AH, BI, CK

a) Chứng minh rằng tam giác AKI đồng dạng với tam giác ACB ;

b) Biết $S_{AKI} = S_{BKH} = S_{CHI}$. Chứng minh rằng: ABC là tam giác đều.

2. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và đường cao AH bằng $R\sqrt{2}$. Gọi M và N thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC . Chứng minh rằng ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm) Với ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$, chứng minh:

$$\frac{1-x^2}{x+yz} + \frac{1-y^2}{y+zx} + \frac{1-z^2}{z+xy} \geq 6.$$

Đề số 36

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

a) Rút gọn P .b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Câu 2. (1,5 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$.

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho x, y là các số dương.a) Chứng minh: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax . Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của IAM cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K .

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.b) Chứng minh $HF \perp BI$.c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi $\triangle AMB$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R ?

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng: $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$.

Hết

Đề số 37

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1}$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm giá trị của x để $\frac{2}{A}$ là số tự nhiên.

Câu 2: (6,0 điểm)

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x^2 - 8x + 24} . \quad \text{b) } \begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 \end{cases}$$

Câu 3: (4,0 điểm)

Cho đường thẳng (d) có phương trình là: $y = 2x + 3$.

- Tìm trên đường thẳng (d) những điểm có toạ độ thoả mãn đẳng thức $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$.
- Từ điểm A(-1; 1) vẽ đường thẳng (d') vuông góc với (d) và từ điểm B(-3;-3) vẽ đường thẳng (d'') đi qua điểm C(1; 0). Viết phương trình của các đường thẳng (d') và (d'').
- Tính diện tích của tam giác tạo bởi các đường thẳng (d), (d'), (d'').

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB, lấy điểm E đối xứng với A qua M.

- Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?
- Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên AC và BC. Chứng minh rằng $\frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R}$.
- Gọi C' là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng C' nằm trên một đường tròn cố định khi M di chuyển trên đường kính AB (M khác A và B).

Hết

Đề số 38

(Đề thi có 1 trang)

- Câu 1.** a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 6xy + 5y^2 - 5y - x$.
b) Cho $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $S = 2018a^2 + 2018b^2$.
c) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$. Tìm giá trị của x để $A > 0$.
- Câu 2.** a) Cho n là số nguyên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.
b) Tìm các số hữu tỉ n thỏa mãn tổng sau là số chính phương: $n^2 + n + 503$.
- Câu 3.** a) Tìm các số nguyên x thỏa mãn phương trình: $(3x - 1)(4x - 1)(6x - 1)(12x - 1) = 330$
b) Giải phương trình: $|x - 2|(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 4$
c) Tìm các cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$
- Câu 4.** Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC , đường thẳng này cắt By tại D . Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD).
a) Chứng minh rằng: $OA^2 = AC \cdot BD$.
b) Chứng minh rằng tam giác AMB vuông.
c) Gọi N là giao điểm của BC và AD . Chứng minh rằng $MN \parallel AC$.
- Câu 5.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Hết

Đề số 39

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ (với $0 < x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = P - 9\sqrt{x} + 2019$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x - 1 + 4\sqrt{7 - x} = 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{(7 - x)(x - 1)}$.

b) Cho các số thực dương a, b với $a \neq b$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} \leq \frac{1}{3abc}.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a(a^2 + 8bc)} + \frac{1}{b(b^2 + 8ac)} + \frac{1}{c(c^2 + 8ab)} \leq \frac{1}{3abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n - 50$ và $n + 50$ đều là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 = 8q + 1$.

Câu 5. (2,5 điểm)

Trong tam giác ABC lấy điểm O sao cho $ABO = ACO$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và AC .

a) Chứng minh rằng $OB \cdot \sin OAC = OC \cdot \sin OAB$.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và HK . Chứng minh rằng MN vuông góc với HK .

Câu 6. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Đường thẳng d là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi D là hình chiếu của C trên AB . Từ A và B kẻ AH và BK vuông góc với đường thẳng d . Chứng minh rằng:

a) $AH + BK$ không đổi khi tiếp tuyến d thay đổi trên đường tròn (O).

b) Đường tròn đường kính HK luôn tiếp xúc với AK, BK và AB .

Xác định vị trí C để tứ giác $AHKB$ có diện tích lớn nhất.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HUYỆN PHÙ NINH

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013-2014

MÔN THI: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 40

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

- Tìm số tự nhiên n sao cho: $n + 24$ và $n - 65$ là hai số chính phương
- Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Câu 2. (4,0 điểm):

a. Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2} \dots$

Biết $xyz = 4$, tính $\sqrt{A}$.

b. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Câu 3. (3,0 điểm):

Giải phương trình: $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

Câu 4. (7,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA' , BB' , CC' , H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$.

c) Tam giác ABC như thế nào thì biểu thức $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

2. Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

a) $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED.

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

Câu 5. (2,0 điểm):

Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng:

$$T = \frac{a}{3a+b+c} + \frac{b}{3b+a+c} + \frac{c}{3c+b+a} \leq \frac{3}{5}$$

Hết

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ THANH HÓA**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN**

Ngày thi: 02/12/2014

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 41

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})} - \frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12} - \frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}.$$

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9; x \neq 1$

2) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Câu 2. (6,0 điểm)

1) Cho phương trình: $\frac{3a+1}{a+x} - \frac{a-1}{a-x} = \frac{2a(a^2-1)}{x^2-a^2}$ (a là tham số)

a) Giải phương trình trên.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của a để phương trình có nghiệm x là số nguyên tố.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z) \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ sao cho:

$$\begin{cases} \overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n-2)^2 \end{cases} \text{ Với } n \in \mathbb{Z}; n > 2$$

2) Cho tam giác ABC có 3 cạnh a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$.

Chứng minh: $52 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc < 54$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD cạnh là a và N là một điểm trên cạnh AB. Tia CN cắt tia DA tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho BF = DE. Gọi M là trung điểm của EF.

1) Chứng minh tam giác ACE đồng dạng với tam giác BCM.

2) Xác định vị trí điểm N trên AB sao cho diện tích tứ giác ACFE gấp ba lần diện tích hình vuông ABCD.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $B + C = 105^\circ$ và $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính B và C

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TÂN KÌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 42

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 02/12/2014

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

a) Nêu điều kiện xác định rồi rút gọn A .

b) Tính giá trị của A khi $\frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}$.

c) Cho $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot A$. Tìm x để $P < 0$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của hai số lẻ không là số chính phương.

b) Giải phương trình: $x + 17 = 2\sqrt{4-x} + 6\sqrt{2x+3}$

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $6x^2 + 19y^2 + 24x - 2y + 12xy - 725 = 0$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1}$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), đường cao AH . Gọi M là trung điểm của AB , AD là phân giác của góc BAH , ($D \in BH$), MD cắt AH tại E .

a) Chứng minh rằng $\frac{AB^2}{BH} = \frac{AC^2}{CH}$.

b) Tính độ dài AH biết diện tích các tam giác $\triangle AHC$; $\triangle AHB$ và lần lượt là $8,64\text{cm}^2$; $15,36\text{cm}^2$.

c) Chứng minh: $CE \parallel AD$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho 33 điểm nằm trong hình vuông có độ dài cạnh bằng 4 trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn bán kính bằng $\sqrt{2}$ và tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không 3 điểm trong các điểm đã cho sao cho chúng đều thuộc phần chung của ba hình tròn có tâm cũng chính là ba điểm đó.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN ĐỒNG XUÂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 43

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 13/12/2012

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4 điểm)

a/ Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 9x + 20$

b/ Rút gọn $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

Câu 2. (4 điểm)

a/ Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 20x + 6} = x - 4$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $A = \frac{8x^2 + 6xy}{x^2 + y^2}$

Câu 3. (4 điểm)

a/ Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$

Chứng minh $4S + 1$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương n

b/ Cho $a, b, c, d > 0$ và $S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$

Chứng minh $1 < S < 2$

Câu 4. (4 điểm)

Cho điểm D nằm trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE và CDF (E, F, D nằm cùng phía đối với BC). Chứng minh tứ giác AEDF là hình bình hành.

Câu 5. (4 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O; bán kính R, đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm H thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở M và N, các đường thẳng AN và BM cắt nhau tại P.

a/ Chứng minh $HP \parallel AM$

b/ Gọi K là giao điểm của HI và AB. Tính độ dài của HK theo R biết $AK = \frac{1}{5} AB$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN MỘC XUÂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 10/01/2017

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 44

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

b) So sánh $A = \frac{10^{2016} - 1}{10^{2017} - 11}$ và $B = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 9}$

Câu 2. (5,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Câu 3. (3,5 điểm)

a) Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

b) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Câu 4. (5,5 điểm)

Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

a) Chứng minh $OE \perp OK$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

b) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh: $IN = IO$.

c) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh: $EF \parallel AB$.

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Một điểm P chạy trên cung nhỏ AB (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O; R).

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TIỀN HẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 45

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm) Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

b) $B = \sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(b+ca)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}$

(Với a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 1$)

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Tìm các số a, b sao cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx - 1$ chia hết cho đa thức $x^2 - 3x + 2$.

b) Chứng minh rằng: $B = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm m để phương trình: $\frac{2m-1}{x-2} = m-3$ vô nghiệm.

b) Giải phương trình: $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$.

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Biết $AB = 6\text{cm}$, $HC = 6,4\text{cm}$. Tính BC, AC.

b) Chứng minh rằng $DE^3 = BC \cdot BD \cdot CE$

c) Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt HD tại M, Đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt HE tại N. Chứng minh rằng M, A, N thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng BN, CM, DE đồng qui.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Với a, b, c, d là các số thực)

Biết $f(1) = 10$; $f(2) = 20$; $f(3) = 30$. Tính giá trị biểu thức $A = f(8) + f(-4)$.

Hết

Đề số 46

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$ với $x, y \geq 0$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc giá trị của biến.

b) Chứng minh rằng $x_0 = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$ là một nghiệm của phương trình sau $(x^3 - 3x - 17)^{2019} - 1 = 0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{2x_1x_2 + 7}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3y^3 + 1 = 19x^3 \\ xy^2 + y = -6x^2 \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}$ với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q = a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \dots + a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

b) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{1+a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^3}} \geq 1$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn O_1 và O_2 tiếp xúc ngoài nhau tại điểm I . Vẽ đường tròn O tiếp xúc trong với O_1 và O_2 lần lượt tại B và C . Từ điểm I vẽ đường thẳng d vuông góc với O_1O_2 , d cắt cung lớn và cung nhỏ BC của O lần lượt tại điểm A, Q . Cho AB cắt O_1 tại điểm thứ hai là E , AC cắt O_2 tại điểm thứ hai là D .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCDE$ nội tiếp;

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với DE ;

c) Vẽ đường kính MN của O vuông góc với AI (điểm M nằm trên AB không chứa điểm C). Chứng minh rằng ba đường thẳng AQ, BM, CN đồng quy.

Câu 5. (1,0 điểm) Bên trong đường tròn có đường kính $AB = 19$ cho 38 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng vuông góc hoặc song song với AB và giao ít nhất hai đoạn trong 38 đoạn đã cho.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KIM THÀNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 47

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

b) Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$.

Hãy tính giá trị biểu thức

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

c) Cho hàm số: $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2012}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

d) Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương?

Câu 3. (4,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$

b) $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Câu 4. (3,0 điểm)

e) Tìm $x; y$ thỏa mãn: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$

f) Cho $a; b; c$ là các số thuộc đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Hãy chứng minh rằng: $a + b + c \geq 0$

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao $AK; BD; CE$ cắt nhau tại H .

g) Chứng minh: $\frac{KC}{KB} = \frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2}$

b) Giả sử: $HK = \frac{1}{3}AK$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$.

c) Giả sử $S_{ABC} = 120 \text{ cm}^2$ và $BAC = 60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE ?

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH OAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 48

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Cho $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1. Rút gọn M .

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức P .

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}.$$

Câu 2. (4,0 điểm) Giải phương trình:

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 24$ b) $|2x - x^2 - 1| = 2x - x^2 - 1$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

b) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF .

1. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA .

2. Gọi α là số đo của góc BFE . Hai đường kính AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3. Chứng minh các hệ thức sau: $CE \cdot DF \cdot EF = CD^3$ và $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Đề số 49

(Đề thi có một trang)

Câu 1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Câu 2. Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC , ($AB < AC$), với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H .

Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G , gọi I là hình chiếu của H trên GA .

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

2. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $GH \perp AM$.

Câu 4. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Cau 4. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG TRỰC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 50

(Đề thi có 2 trang)

Phần trắc nghiệm. (2,0 điểm) Mỗi câu sau có nêu bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Hãy chọn phương án đúng (viết vào bài làm chữ cái đứng trước phương án được lựa chọn).

1. Biểu thức $\sqrt{(-4)^2(\sqrt{7}-3)^2}$ có giá trị bằng:

- A. $2(\sqrt{7}-3)$ B. $-2(\sqrt{7}-3)$ C. $4(\sqrt{7}-3)$ D. $4(3-\sqrt{7})$

2. Cho $\sqrt{20-a^2} - \sqrt{10-a^2} = 5$ biểu thức $\sqrt{20-a^2} + \sqrt{10-a^2}$ có giá trị bằng:

- A. 2 B. -2 C. 6 D. -6

3 Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác vuông cân. Khi đó, tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ C. $1+\sqrt{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

4. Cho (O; 5 cm) và O nằm trong hai dây AB // CD có độ dài AB = 8 cm, CD = 6 cm. Khi đó khoảng cách giữa hai dây là:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 5 cm D. 7 cm

Phần tự luận (18 điểm)

Câu 1 . (3 điểm)

1. Tính $A = \sqrt{6-\sqrt{11}} - \sqrt{6+\sqrt{11}}$

2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right)$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{4-x} < 0$

Câu 2.(2 điểm) Giải phương trình $(4x+2)\sqrt{x+8} = 3x^2 + 7x + 8$

Câu 3. (3 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các đường thẳng

(d₁): $x - 3y + 5 = 0$

(d₂): $x + 2y - 5 = 0$

$$(d_3): (m^2 - 1)x + 3y - 5 - 2m = 0$$

a) Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2)

b) Xác định m để ba đường thẳng trên là 3 đường thẳng phân biệt đồng quy.

Câu 4. (8 điểm). Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kéo dài AO cắt đường tròn tại K.

1. Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành

2. Kẻ $OM \perp BC$ tại M. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh $S_{AHG} = 2S_{AGO}$

3. Chứng minh $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$

Câu 5. (2 điểm) Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} 2\sqrt{2xy-y} + 2x + y = 10 \\ \sqrt{3y+4} - \sqrt{2y+1} + 2\sqrt{2x-1} = 3 \end{cases}$$

_____Hết_____

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1.

a. Điều kiện : $x > 0; x \neq 1$.

$$P = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1)$$

$$= x - \sqrt{x} + 1$$

Vậy $P = x - \sqrt{x} + 1$, với $x > 0; x \neq 1$.

b. $P = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$ thỏa mãn đk.

Vậy GTNN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

c. Với $x > 0; x \neq 1$ thì $Q = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} > 0$. (1)

Xét $2 - \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{x - \sqrt{x} + 1} \geq 0$

Dấu bằng không xảy ra vì điều kiện $x \neq 1$.

suy ra $Q < 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $0 < Q < 2$.

Câu 2.

a) $\frac{2014}{\sqrt{2015}} + \frac{2015}{\sqrt{2014}} = \frac{2015-1}{\sqrt{2015}} + \frac{2014+1}{\sqrt{2014}}$

$$= \sqrt{2015} + \sqrt{2014} + \frac{1}{\sqrt{2014}} - \frac{1}{\sqrt{2015}} > \sqrt{2015} + \sqrt{2014}$$

Vậy $\frac{2014}{\sqrt{2015}} + \frac{2015}{\sqrt{2014}} > \sqrt{2014} + \sqrt{2015}$.

b) Phân tích được thành $(2x - y)^2 + (y - z + 1)^2 + (z - 3)^2 \leq 0$ (1)

Vì $(2x - y)^2 \geq 0; (y - z + 1)^2 \geq 0; (z - 3)^2 \geq 0$ với mọi x, y, z nên từ

(1) suy ra $x = 1; y = 2; z = 3$.

b. Điều kiện: $x > -3$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2 - \sqrt{\frac{1}{x+3}}\right) + \left(2 - \sqrt{\frac{5}{x+4}}\right) = 0$$

$$\frac{4 - \frac{1}{x+3}}{2 + \sqrt{\frac{1}{x+3}}} + \frac{4 - \frac{5}{x+4}}{2 + \sqrt{\frac{5}{x+4}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+11}{(x+3)\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x+3}}\right)} + \frac{4x+11}{(x+4)\left(2 + \sqrt{\frac{5}{x+4}}\right)} = 0$$

Vì $x > -3$ nên $\frac{1}{(x+3)\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x+3}}\right)} + \frac{1}{(x+4)\left(2 + \sqrt{\frac{5}{x+4}}\right)} > 0$

Do đó $4x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{4}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-\frac{11}{4}\right\}$.

Câu 3.

a. Ta có $x = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3(\sqrt{5}+2)}}{\sqrt{5} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}} = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$.

Do đó $B = -1$.

b. Dễ thấy $x \neq y$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x > y$.

Từ $(3y+1) \vdots x \Rightarrow 3y+1 = p.x \quad (p \in \mathbb{N}^*)$.

Vì $x > y$ nên $3x > 3y+1 = p.x \Rightarrow p < 3$. Vậy $p \in \{1; 2\}$

- Với $p = 1: \Rightarrow x = 3y+1 \Rightarrow 3x+1 = 9y+4 \vdots y \Rightarrow 4 \vdots y$

Mà $y > 1$ nên $y \in \{2; 4\}$

+ Với $y = 2$ thì $x = 7$.

+ Với $y = 4$ thì $x = 13$.

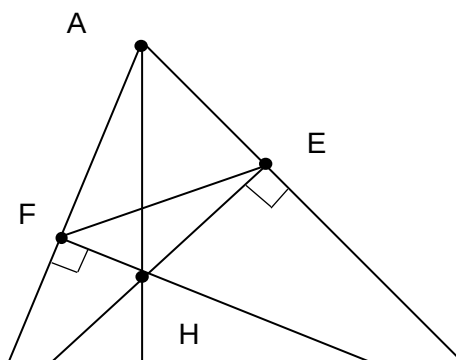
- Với $p = 2: \Rightarrow 2x = 3y+1 \Rightarrow 6x = 9y+3 \Rightarrow 2(3x+1) = 9y+5$

Vì $3x+1 \vdots y$ nên $9y+5 \vdots y$ suy ra $5 \vdots y$, mà $y > 1$ nên $y = 5$,
suy ra $x = 8$.

Tương tự với $y > x$ ta cũng được các giá trị tương ứng.

Vậy các cặp $(x; y)$ cần tìm là: $(7; 2); (2; 7); (8; 5); (5; 8); (4; 13); (13; 4)$;

Câu 4



a. Tam giác ABE vuông tại E nên $\cos A = \frac{AE}{AB}$

Tam giác ACF vuông tại F nên $\cos A = \frac{AF}{AC}$.

Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$

* Từ $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$

b. Tương tự câu a, $\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \cos^2 B, \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$.

Từ đó suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

Suy ra $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$

c. Ta có: $\tan B = \frac{AD}{BD}, \tan C = \frac{AD}{CD}$. Suy ra $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD}$

Vì $AH = k \cdot HD \Rightarrow AD = AH + HD = (k+1) \cdot HD$ nên $AD^2 = (k+1)^2 \cdot HD^2$ (1)

Do đó $\tan B \cdot \tan C = \frac{HD^2 (k+1)^2}{BD \cdot CD}$ (2)

Lại có $\triangle DHB \sim \triangle DCA (g.g)$ nên $\frac{DB}{AD} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow DB \cdot DC = HD \cdot AD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$\tan B \cdot \tan C = \frac{HD^2 (k+1)^2}{AD \cdot HD} = \frac{HD (k+1)^2}{AD} = \frac{HD (k+1)^2}{HD (k+1)} = k+1$.

d. Từ $\triangle AFC \sim \triangle HEC \Rightarrow \frac{HC}{AC} = \frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{HC \cdot HB}{AC \cdot AB} = \frac{CE \cdot HB}{CF \cdot AB} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{HB \cdot HA}{AC \cdot BC} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}; \frac{HA \cdot HC}{AB \cdot BC} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$. Do đó:

$\frac{HC \cdot HB}{AC \cdot AB} + \frac{HB \cdot HA}{AC \cdot BC} + \frac{HA \cdot HC}{AB \cdot BC} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1$

• Ta chứng minh được: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (*)

Áp dụng (*) ta có: $\left(\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{AC} + \frac{HC}{AB}\right)^2 \geq 3 \cdot \left(\frac{HA \cdot HB}{BC \cdot BA} + \frac{HB \cdot HC}{CA \cdot CB} + \frac{HC \cdot HA}{AB \cdot AC}\right) = 3 \cdot 1 = 3$

Suy ra $\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{AC} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

Câu 5.

Với $x, y \in \mathbb{N}^*$ thì 36^x có chữ số tận cùng là 6, 5^y có chữ số tận cùng là 5 nên :

A có chữ số tận cùng là 1 (nếu $36^x > 5^y$) hoặc 9 (nếu $36^x < 5^y$)

TH1: A = 1. khi đó $36^x - 5^y = 1 \Leftrightarrow 36^x - 1 = 5^y$. Điều này không xảy ra vì $(36^x - 1) : 35$ nên $(36^x - 1) : 7$, còn 5^y không chia hết cho 7.

TH2: A = 9. Khi đó $5^y - 36^x = 9 \Leftrightarrow 5^y = 9 + 36^x$ điều này không xảy ra vì $(9 + 36^x) : 9$ còn 5^y không chia hết cho 9.

TH3: A = 11. Khi đó $36^x - 5^y = 11$. Thấy $x = 1, y = 2$ thỏa mãn.

Vậy GTNN của A bằng 11, khi $x = 1, y = 2$.

Đề số 2

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } x &= 9 - \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}-2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^2} \\ &= 9 - \frac{2}{\sqrt{5}-2} + \frac{2}{\sqrt{5}+2} = 9 - \frac{2\sqrt{5}+4-2\sqrt{5}+4}{(\sqrt{5})^2-2^2} = 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = f(1) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \sqrt{2015^2-1} - \sqrt{2014^2-1} &= \frac{(\sqrt{2017^2-1} - \sqrt{2016^2-1})(\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1})}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} \\ &= \frac{(2015^2-1) - (2014^2-1)}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} = \frac{2017^2 - 2016^2}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} = \frac{(2017-2016)(2017+2016)}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} \\ &= \frac{2017+2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} > \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{2017^2-1} - \sqrt{2016^2-1} > \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } \sin x \cdot \cos x + \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} + \frac{\cos^2 x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} \\ = \sin x \cdot \cos x + \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} + \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} \end{aligned}$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \sin x \cdot \cos x + \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x}$$

$$= \sin x \cdot \cos x + 1 - \sin x \cdot \cos x = 1$$

d) Ta có: ĐK: $a \neq \pm b\sqrt{5}$ (*)

$$\frac{2}{a+b\sqrt{5}} - \frac{3}{a-b\sqrt{5}} = -9 - 20\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b\sqrt{5}) - 3(a+b\sqrt{5}) = -(9+20\sqrt{5})(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 45b^2 - a = \sqrt{5}(-20a^2 + 100b^2 + 5b) \quad (*)$$

Ta thấy (*) có dạng $A = B\sqrt{5}$ trong đó $A, B \in \mathbb{Q}$, nếu $B \neq 0$ thì $\sqrt{5} = \frac{A}{B} \in \mathbb{I}$ vô lí vậy $B = 0 \Rightarrow A = 0$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 45b^2 - a = 0 \\ -20a^2 + 100b^2 + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 45b^2 - a = 0 \\ -9a^2 + 45b^2 + \frac{9}{4}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 45b^2 - a = 0 \\ a = \frac{9}{4}b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4}b \\ b^2 - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ (không t/m ĐK (*)). Vậy } a = 9; b = 4$$

Câu 2.

a) ĐK $x \neq 1; x \neq 3$ (**)

$$\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+3}{6}$$

+ Trường hợp: $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ (TMĐK (**))

+ Trường hợp: $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$$\text{Ta có } (x-3)(x-1) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 7 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{7} \text{ hoặc } x = 2 - \sqrt{7} \text{ (TMĐK (**))}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: $S = \{-3; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}\}$

b) ĐK: $x \geq 2$ (***)

$$x^2 - 6x + 9 + x - 1 - 2\sqrt{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x-2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn ĐK(**))}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$

Câu 3. a) Ta có: $P(0) = d : 5$

$$P(1) = a + b + c + d : 5 \Rightarrow a + b + c : 5 \quad (1)$$

$$P(-1) = -a + b - c + d : 5 \Rightarrow -a + b - c : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2b : 5 \Rightarrow b : 5$ vì $(2,5) = 1$, suy ra $a + c : 5$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d : 5 \Rightarrow 8a + 2c : 5 \Rightarrow a : 5 \Rightarrow c : 5$$

b) Ta có $4x^2 - 4xy + 4y^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + 3y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = 16 - 3y^2$$

$$\text{Vì } (2x - y)^2 \geq 0 \text{ nên } 16 - 3y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 5 \Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4\}$$

- Nếu $y^2 = 0$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- Nếu $y^2 = 1$ thì $(2x - y)^2 = 13$ không là số chính phương nên loại $y^2 = 1$
- Nếu $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$
 - + Khi $y = 2$ thì $x = 0$ hoặc $x = 2$
 - + Khi $y = -2$ thì $x = 0$ hoặc $x = -2$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên là $(x, y) = (-2; 0); (2; 0); (0; 2); (2; 2); (0; -2); (-2; -2)$

c) - Nếu n là số chẵn thì $n^4 + 4^n$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số

- Nếu n là số lẻ, đặt $n = 2k + 1$ với k là số tự nhiên lớn hơn 0

$$\begin{aligned} n^4 + 4^{2k+1} &= (n^2)^2 + (2 \cdot 4^k)^2 \\ &= (n^2)^2 + 2 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot 4^k + (2 \cdot 4^k)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot 4^k \\ &= (n^2 + 2 \cdot 4^k)^2 - (2n \cdot 2^k)^2 = (n^2 + 2 \cdot 4^k - 2n \cdot 2^k) \cdot (n^2 + 2 \cdot 4^k + 2n \cdot 2^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } n^2 + 2 \cdot 4^k + 2n \cdot 2^k &> n^2 + 2 \cdot 4^k - 2n \cdot 2^k = n^2 + 4^k - 2n \cdot 2^k + 4^k \\ &= (n - 2^k)^2 + 4^k > 4 \end{aligned}$$

Suy ra $n^4 + 4^{2k+1}$ là hợp số

Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1.

Câu 4.

$$\text{a) Giả sử ta có } \frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq 2ab^3 + 2a^3b - 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2ab^3 - 2a^3b + 2a^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + b^4 - 2ab^3 + a^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - ab)^2 + (b^2 - ab)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng với mọi } a, b$$

Vậy $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$ với mọi a, b

b) Đặt $a + b = x$; $b + c = y$; $c + a = z$ với x, y, z là các số thực dương

Ta có $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = 2 - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{y+1} + 1 - \frac{1}{z+1} = \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \geq 2\sqrt{\frac{y}{y+1} \cdot \frac{z}{z+1}}$$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $\frac{y}{y+1}$ và $\frac{z}{z+1}$)

Chúng minh tương tự ta có $\frac{1}{y+1} \geq 2\sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{z}{z+1}}$ và $\frac{1}{z+1} \geq 2\sqrt{\frac{y}{y+1} \cdot \frac{x}{x+1}}$

Suy ra $\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{y+1} \cdot \frac{1}{z+1} \geq 2\sqrt{\frac{y}{y+1} \cdot \frac{z}{z+1}} \cdot 2\sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{z}{z+1}} \cdot 2\sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{y+1} \cdot \frac{1}{z+1} \geq 8 \frac{xyz}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

$$\Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{8}.$$

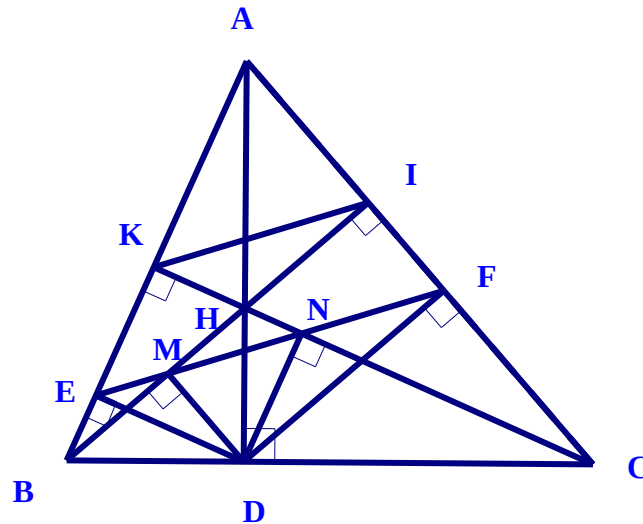
Dấu “=” xảy ra khi

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của tích $(a+b)(b+c)(c+a)$ là $\frac{1}{8}$

Câu 5.



a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $AE \cdot AB = AD^2$;
 $AF \cdot AC = AD^2$

Suy ra: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

Biểu thị được: $\tan B = \frac{AD}{BD}$; $\tan C = \frac{AD}{CD}$; $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD}$

b) Biểu thị được:

$\tan B = \tan DHC = \frac{CD}{HD}$; $\tan C = \tan DHB = \frac{BD}{HD}$; $\tan B \cdot \tan C = \frac{BD \cdot CD}{HD^2}$

Suy ra: $(\tan B \cdot \tan C)^2 = \frac{AD^2}{HD^2} \Rightarrow \tan B \cdot \tan C = \frac{AD}{HD} = 3$

c) Chứng minh được: $AE \cdot AB / AK \cdot AB = AF \cdot AC / AI \cdot AC \Rightarrow EF \parallel IK$

Chứng minh được: $\frac{BM}{MI} = \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EK} \Rightarrow ME \parallel IK \Rightarrow M \in EF$

Tương tự chứng minh được $N \in EF$ và suy ra 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng

Đề số 3

Câu 1.

1) Ta có: $\frac{2008}{\sqrt{2009}} + \frac{2009}{\sqrt{2008}} = \frac{2009-1}{\sqrt{2009}} + \frac{2008+1}{\sqrt{2008}}$

$= (\sqrt{2008} + \sqrt{2009}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2008}} - \frac{1}{\sqrt{2009}} \right) > 0$

Vậy $\frac{2008}{\sqrt{2009}} + \frac{2009}{\sqrt{2008}} > \sqrt{2008} + \sqrt{2009}$

2) Ta có: $B = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2010}}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{2010} + \sqrt{2010}} \\ &> \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{2010} + \sqrt{2011}} \\ &= 2(\sqrt{2011} - 1) > 2.43 = 86 \end{aligned}$$

Câu 2.

Ta có: $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = 2$

$$\Rightarrow P = (2^3 - 4.2 - 1)^{2010} = 1 \in \mathbb{N}$$

Câu 3.

1) Ta có: $\sqrt{2x-1} + 2 = x \Rightarrow \sqrt{2x-1} = x-2$ Điều kiện: $x \geq 2$

$$\sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow 2x-1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

2) Ta có: $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ Điều kiện: $x \in \mathbb{R}, y > 0$

Bình phương hai vế ta được:

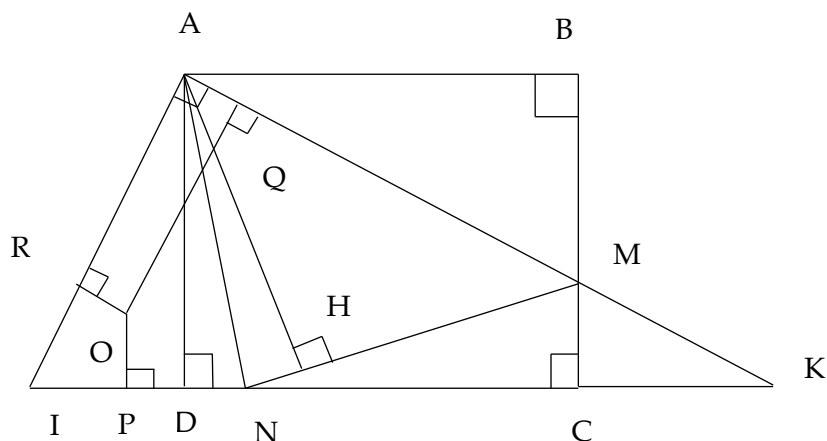
$$y^2 = (x+2)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (y+x+2)(y-x-2) = 1$$

Do x, y nguyên và y nguyên dương nên ta có:

$$\begin{cases} y+x+2=1 \\ y-x-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Câu 4.



1) Ta có: $\triangle ABM = \triangle ADI \Rightarrow AM = AI$ (1)

Trong tam giác AIK vuông tại A ta có: $\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2}$ (2). và $AB = AD$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2}$$

2) Kẻ AH vuông góc MN ($H \in MN$).

Do $CM + CN = 7$ và $CM - CN = 1 \Rightarrow CM = 4; CN = 3 \Rightarrow MN = 5$

Ta có $\triangle AMN = \triangle AIN \Rightarrow AH = AD \Rightarrow IN = MN$

$$\triangle AMH = \triangle AID \Rightarrow ID = MH \text{ mà } ID = BM \Rightarrow MH = BM$$

Ta lại có: $DN + BM = MN = 5$ và $CM + BM = CN + DN \Rightarrow DN - BM = CM - CN = 1$

$$\Rightarrow DN = 3; BM = 2; BC = AD = AH = 6$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AH.MN = \frac{1}{2} .6.5 = 15(cm^2)$$

3) Từ giả thiết ta có AQRO là hình chữ nhật

$$OP^2 + OQ^2 + OR^2 = OA^2 + OP^2 \geq \frac{(OA+OP)^2}{2} \geq \frac{AP^2}{2} \geq \frac{AD^2}{2}$$

$OP^2 + OQ^2 + OR^2$ nhỏ nhất khi O là trung điểm của AD

Câu 5.

Vai trò của a, b, c là như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử: $a \leq b \leq c$. Khi đó vì: $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$ nên ta có: $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a^3 \leq a$.

$$\text{Mặt khác: } 1 \leq c \leq 2 \Rightarrow (c-1)(c-2)(c+3) \leq 0 \Rightarrow c^3 \leq 7c-6$$

Ta xét hai trường hợp của b:

Nếu $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow b^3 \leq b$. Khi đó:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq a + b + 7c - 6 = a + b + c + 6c - 6 \leq 3 + 6.2 - 6 = 9$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$$

Nếu $1 \leq b \leq 2 \Rightarrow b^3 \leq 7b - 6$. Khi đó:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq a + 7b - 6 + 7c - 6 = 7(a + b + c) - 6a - 12 = 9 - 6a \leq 9$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$ (đpcm)

Đề số 4

Câu 1.

a) Điều kiện: $x > 1$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})} + \frac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1}}{-1} + x$$

$$= x - 2\sqrt{x-1}$$

b) Với $x > 1$ ta có: $B > 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} > 0$

$$\Leftrightarrow x > 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 4(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \quad (*)$$

(*) đúng với mọi $x \neq 2$. Vậy $B > 0$ khi $x > 1$ và $x \neq 2$

c) Ta có: $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{81-28} = 9+2\sqrt{7}$

Thay vào $B = x - 2\sqrt{x-1}$ ta có:

$$B = 9+2\sqrt{7} - 2\sqrt{8+2\sqrt{7}} = 9+2\sqrt{7} - 2(\sqrt{7}+1) = 7$$

Vậy khi $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$ thì $B = 7$.

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \geq 5$

$$\sqrt{x-1+4\sqrt{x-5}} + \sqrt{-1+x-4\sqrt{x-5}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-5}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-5}-2)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-5}+2| + |\sqrt{x-5}-2| = 4$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-5}+2| + |2-\sqrt{x-5}| = 4 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức: $|A|+|B| \geq |A+B|$ vào (1) ta có:

$$|\sqrt{x-5}+2| + |2-\sqrt{x-5}| \geq |\sqrt{x-5}+2+2-\sqrt{x-5}| = 4$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow (\sqrt{x-5}+2)(2-\sqrt{x-5}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{x-5}) \geq 0 \quad (\text{vì } \sqrt{x-5}+2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{x-5}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 9$$

Kết hợp với điều kiện, ta có $5 \leq x \leq 9$

Vậy nghiệm của phương trình là: $5 \leq x \leq 9$

b. Giả sử: $\sqrt{10}$ là số hữu tỉ. Đặt: $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*, \text{UCLN}(a;b)=1$)

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 10 \Rightarrow a^2 = 10b^2 \Rightarrow a^2 : 5 \Rightarrow a : 5 \Rightarrow a^2 : 25$$

$$\Rightarrow 10b^2 : 25 \Rightarrow b^2 : 5 \Rightarrow b : 5$$

Khi đó $\text{ƯCLN}(a;b) \geq 5$ mâu thuẫn với $\text{ƯCLN}(a;b) = 1$.

Vậy $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

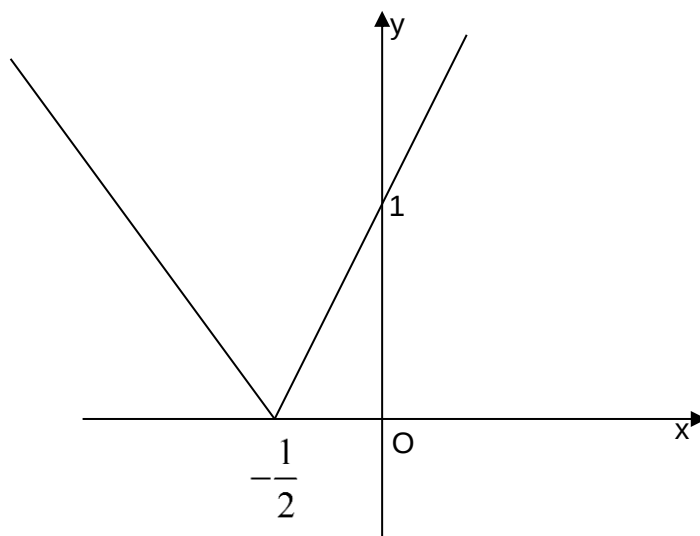
Câu 3.

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = |2x + 1|$

$$y = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{khi } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nhận xét rằng $y \geq 0$ với mọi x .

Ta có đồ thị hàm số :



b.(1,5đ) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm của hai đồ thị hai hàm số

$y = |2x + 1|$ và $y = 3x - 5$. ta có :

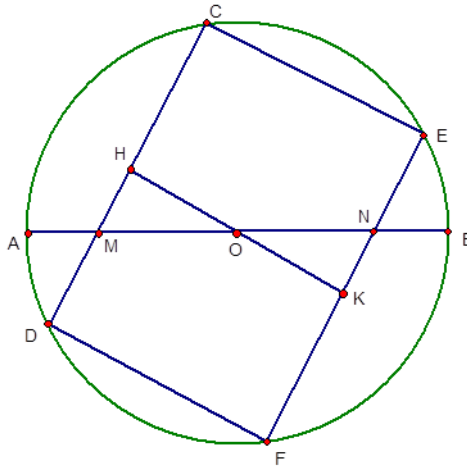
$$|2x_0 + 1| = 3x_0 - 5 \text{ điều kiện } x_0 \geq \frac{5}{3}$$

Trường hợp 1: $2x_0 + 1 = 3x_0 - 5 \Rightarrow x_0 = 6$ (nhận).

Trường hợp 2: $2x_0 + 1 = -(3x_0 - 5) \Rightarrow x_0 = \frac{4}{5}$ (loại).

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $M(6; 13)$

Câu 4.



a) Vẽ OH vuông góc với CD, OH cắt EF tại K, suy ra HK vuông góc với EF (vì CD // EF). Suy ra HC = HD; KE = KF.

Ta chứng minh được $\Delta HOM = \Delta KON$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra OH = OK, suy ra CD = EF, từ đó suy ra tứ giác CDEF là hình bình hành.

Lại có KH là đường trung bình của hình bình hành CDFE, nên HK // CE, suy ra

$\angle ECD = \angle KHD = 90^\circ$. Vậy tứ giác CDFE là hình chữ nhật.

b) Ta có: $OH = OM \cdot \sin \angle HMO = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

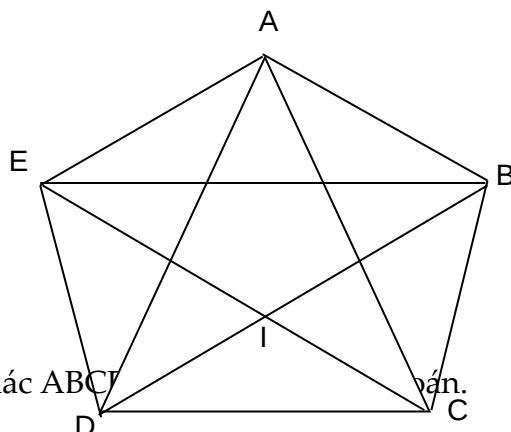
$$CE = HK = 2 \cdot OH = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$CH^2 = OC^2 - OH^2 = R^2 - \frac{3R^2}{9} = \frac{6R^2}{9}$$

Suy ra: $CH = \frac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow CD = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Vậy: $S_{CDEF} = CE \cdot CD = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$ (đvdt)

Câu 5.



Giả sử ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều.

$\Delta ABCD$ và ΔECD có $S_{BCD} = S_{ECD} = 1$, đáy CD chung nên các đường cao hạ từ B và E xuống CD bằng nhau $\Rightarrow EB \parallel CD$.

Tương tự $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE$, $CE \parallel AB$, $DA \parallel BC$

Gọi $I = EC \cap BD \Rightarrow ABIE$ là hình bình hành.

$\Rightarrow S_{IBE} = S_{ABE} = 1$. Đặt $S_{ICD} = x < 1$

$\Rightarrow S_{IBC} = S_{BCD} - S_{ICD} = 1 - x = S_{ECD} - S_{ICD} = S_{IED}$

Lại có: $\frac{S_{ICD}}{S_{IDE}} = \frac{IC}{IE} = \frac{S_{IBC}}{S_{IBE}}$ Lại có $\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Do $x < 1$ nên $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Vậy $S_{IED} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Do đó $S_{ABCDE} = S_{EAB} + S_{EBI} + S_{BCD} + S_{IED}$

$$= 3 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \text{ (đvdt)}$$

Câu 6.

a) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{1}{2}(a^4 + b^4) + \frac{1}{2}(b^4 + c^4) + \frac{1}{2}(c^4 + a^4) \\ &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= \frac{1}{2}a^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}b^2(c^2 + a^2) + \frac{1}{2}c^2(a^2 + b^2) \\ &\geq a^2bc + b^2ca + c^2ab = abc(a + b + c) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ (đpcm).

b) Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1 \quad (1)$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a = (n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $99(a - c) = 4n - 5 \Rightarrow (4n - 5) : 99 \quad (3)$

Mặt khác $100 \leq n^2 - 1 \leq 999 \Leftrightarrow 101 \leq n^2 \leq 1000 \Leftrightarrow 11 \leq n \leq 31 \Leftrightarrow 39 \leq 4n - 5 \leq 119 \quad (4)$

Từ (3) và (4): $\Rightarrow 4n - 5 = 99 \Rightarrow n = 26$

Vậy $\overline{abc} = 675$.

Đề số 5

Câu 1.

1) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned}
 P &= \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{9-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right) \\
 &= \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} : \frac{9-x+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)-(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{9-x+x-9-(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{x}+3} : \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{3}{2-\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

2) Ta có:

$$P > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9 \\ \frac{3}{2-\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9 \\ 2-\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$$

3) Ta có:

$$\begin{aligned}
 P.(x+1) &= \frac{3}{2-\sqrt{x}}.(x+1) = -3\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right) = -3\left(\frac{x-4+5}{\sqrt{x}-2}\right) \\
 &= -3\left[\left(\sqrt{x}+2\right) + \frac{5}{\sqrt{x}-2}\right] = -3\left[\left(\sqrt{x}-2\right) + \frac{5}{\sqrt{x}-2}\right] - 12
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left(\sqrt{x}-2\right) + \frac{5}{\sqrt{x}-2} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{x}-2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Do đó: } P.(x+1) \leq -3.2\sqrt{5} - 12 = -6\sqrt{5} - 12$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x}-2 = \frac{5}{\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = (2+\sqrt{5})^2$$

Câu 2.

$$1) \quad \text{Đặt } n^2 - 14n - 256 = k^2 \ (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305$$

$$\Leftrightarrow (n-k-7)(n+k-7) = 305 = 1.305 = 61.5$$

Xét các trường hợp: do $n+k-7 > n-k-7$

Trường hợp 1: $n-k-7 = 1$ và $n+k-7 = 305 \Rightarrow n = 160$ (nhận)

Trường hợp 2: $n - k - 7 = -305$ và $n + k - 7 = -1 \Rightarrow n = -146$ (loại)

Trường hợp 3: $n - k - 7 = 5$ và $n + k - 7 = 61 \Rightarrow n = 40$ (nhận)

Trường hợp 4: $n - k - 7 = -61$ và $n + k - 7 = -5 \Rightarrow n = -26$ (loại)

Vậy $n = 40$, $k = 28$ hoặc $n = 160$, $k = 152$

2) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương a^2 và b^2

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab = 2$$

$$A = (a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b} \geq 2\left((a+b+1) + \frac{2}{a+b}\right) = 2 + \left(a+b + \frac{4}{a+b}\right) + (a+b)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có :

$$A \geq 2 + 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{4}{a+b}} + 2\sqrt{ab} = 2 + 4 + 2 = 8$$

Giá trị nhỏ nhất của $A = 8$ khi $a = b = 1$.

Câu 3. Điều kiện : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2012 \\ 0 \leq y \leq 2012 \end{cases}$

Từ 2 phương trình của hệ ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2012-y} = \sqrt{2012-x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2012-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2012-y}$$

Nếu $x > y$ thì : $-\sqrt{2012-x} > -\sqrt{2012-y} \Rightarrow VT > VP$ (mâu thuẫn)

Tương tự nếu $x < y \Rightarrow VT < VP$ (mâu thuẫn)

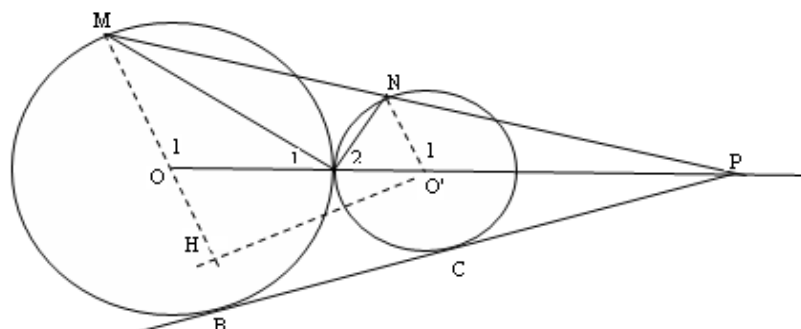
$\Rightarrow x = y$

$$\text{Do đó: Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{2012-x} = \sqrt{2012} & (2) \end{cases}$$

Bình phương 2 vế của pt (2) $\Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2012$

Vậy nghiệm của hệ $(x;y) = (0;0), (2012;2012)$

Câu 4.



1. Ta có: $\widehat{O_1} = \widehat{O'_1} (= 180^\circ - 2\widehat{A_1}) \Rightarrow OM \parallel O'N$

2. Gọi P là giao điểm của MN và OO'

Ta có: $\frac{PO'}{PO} = \frac{O'N}{OM} = \frac{R'}{R}$

Gọi P' là giao điểm của BC và OO'

Do OB // O'C nên: $\frac{P'O'}{P'O} = \frac{O'C}{OB} = \frac{R'}{R}$

$\Rightarrow P \equiv P'$ do đó 3 đường thẳng BC, OO' và MN đồng quy

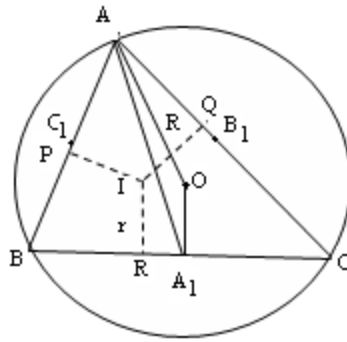
3. MNO'C là hình thang có:

$$S = \frac{(OM + O'N)O'H}{2} = \frac{R + R'}{2} \cdot O'H \leq \frac{R + R'}{2} \cdot OO' = \frac{(R + R')^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow OM \perp OO'$ và $O'N \perp OO'$

Vậy Max $S = \frac{(R + R')^2}{2}$

Câu 5.



1. Gọi O và I là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC

A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB

Có: $AA_1 = m_a \leq R + OA_1$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC$

$BB_1 = m_b \leq R + OB_1$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC$

$CC_1 = m_c \leq R + OC_1$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AC = BC$

$$\Rightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq R \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) + \left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} \right) \quad (1)$$

Có $2S = (a + b + c)r \Rightarrow \frac{2S}{r} = a + b + c = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$

Với $(AB = c, BC = a, AC = b) \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad (2)$

$$2S = a.OA_1 + b.OB_1 + c.OC_1 = \frac{2S}{h_a} \cdot OA_1 + \frac{2S}{h_b} \cdot OB_1 + \frac{2S}{h_c} \cdot OC_1$$

$$= 2S \left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} \right) \Rightarrow \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1),(2),(3)} \Rightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{R+r}{r}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều

2. Theo đề bài có: $a + b^2 = k(a^2b - 1) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \Leftrightarrow a + k = mb \quad (1)$$

$$\text{Với } ka^2 - b = m \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow m + b = ka^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) có } (m-1)(b-1) &= mb - b - m + 1 \\ &= a + k - ka^2 + 1 = (a+1)(k+1-ka) \end{aligned} \quad (3)$$

Vì $m > 0$ theo (1) nên $(m-1)(b-1) \geq 0$. Từ (3)

$$\Rightarrow k+1-ka \geq 0 \Rightarrow k+1 \geq ka \Rightarrow 1 \geq k(a-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a-1) = 0 \\ k(a-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2, k = 1 \end{cases}$$

* Nếu $a = 1$ từ (3) $\Rightarrow (m-1)(b-1) = 2 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$

$$\Rightarrow (a; b) = (1; 2) \text{ và } (1; 3)$$

* Nếu $a = 2, k = 1 \Rightarrow (m-1)(b-1) = 0$

$$\text{Khi } m = 1 \text{ từ (1)} \Rightarrow (a; b) = (2; 3)$$

$$\text{Khi } b = 1 \Rightarrow (a; b) = (2; 1)$$

Thử lại ta có đáp số $(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1)$

Đề số 6

Câu 1.

1) Điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$P > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} > 0 \text{ Theo đ/k } x > 0 \Rightarrow x+3 > 0$$

$$\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

Suy ra $x > 1; x \neq 4$ thì $P > 1$

$$2) P = \frac{2(x+1)}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1} \text{ Với } x > 0; x \neq 1; 4$$

P nguyên $\Leftrightarrow x - 1$ là ước của 4

P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $x = 2$.

Câu 2.

1) Điều kiện $x - 3 + |3 + 2x| \neq 0$

Phương trình tương đương

$$|3x - 5| - |x - 1| - 4|2x + 3| - 4x + 12 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Xét } x < -\frac{3}{2} \text{ Thì } (*) \Leftrightarrow -3x + 5 + (x - 1) + 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -28$$

$$\Leftrightarrow x = -14 \text{ (Thỏa mãn đk)}$$

$$\text{Xét } -\frac{3}{2} \leq x < 1 \text{ Thì } (*)$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5 + x - 1 - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \text{ (Thỏa mãn đk)}$$

$$\text{Xét } 1 \leq x < \frac{5}{3} \text{ Thì } (*)$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{8} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Xét } x \geq \frac{5}{3} \text{ Thì } (*) \Leftrightarrow 3x - 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \text{ (Loại)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \left\{ -14; \frac{2}{7} \right\}$

2) Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$$

$$+ \text{ Nếu } x + y = 0 \Rightarrow xy(xy + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Với $xy = 0$. Kết hợp với $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Với $xy = -1$. Kết hợp với $x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

+ Nếu $x + y \neq 0 \Rightarrow (x + y)^2$ là số chính phương

$xy(xy + 1)$ là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$

Câu 3.

1) Ta có: $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$; $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$; $c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2$

Do đó: $ab = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$\Rightarrow abc = (c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}).c = c^2 + c(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) = c^2 + (xy + \frac{1}{xy})(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$

$= c^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2$

$\Rightarrow A = a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$

2) Ta có: $3(x^2 - \frac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \frac{1}{x^3})$

$\Leftrightarrow 3(x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x}) < 2(x - \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)$

$\Leftrightarrow 3(x + \frac{1}{x}) < 2(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1) \quad (1) \quad (\text{Vì } x > 1 \text{ nên } x - \frac{1}{x} > 0)$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

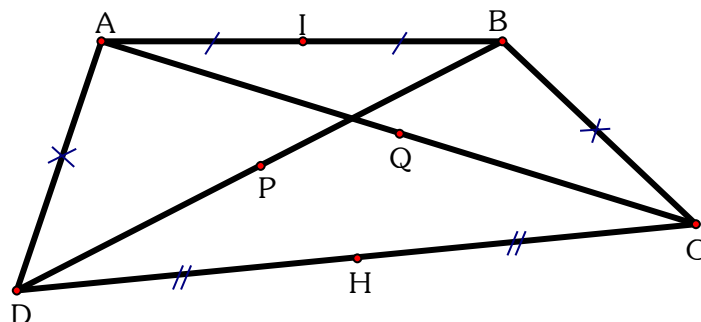
Ta có (1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (t - 2)(2t + 1) > 0 \quad (2)$

Vì $x > 1$ nên $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > 2$ hay $t > 2$

$\Rightarrow (2)$ đúng. Suy ra điều phải chứng minh

Câu 4.



1) Ta có: $IP = HQ$; $IP \parallel HQ$ (Tính chất đường trung bình) và $AD = BC$ (GT)

$\Rightarrow IPHQ$ là hình bình hành

Có $IP = IQ = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$ nên $IPHQ$ là hình thoi

Gọi P_1 ; Q_1 là giao điểm của PQ với AD và BC

Nhận thấy $\triangle HPQ$ cân đỉnh H

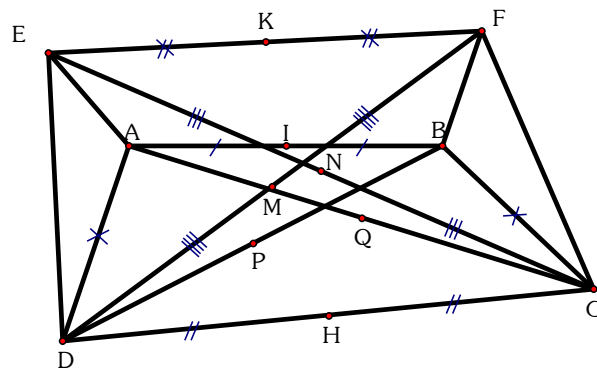
$\Rightarrow HPQ = HQP$ (Góc ở đáy tam giác cân) (1)

Mà $PH \parallel BC \Rightarrow BQ_1P = HPQ$ (So le trong) (2)

$QH \parallel AD \Rightarrow AP_1P = HQP$ (So le trong) (3)

Từ (1); (2); (3) Suy ra $AP_1P = BQ_1P$ (đpcm)

2)



Gọi K , M , N lần lượt là trung điểm của EF , DF , CE

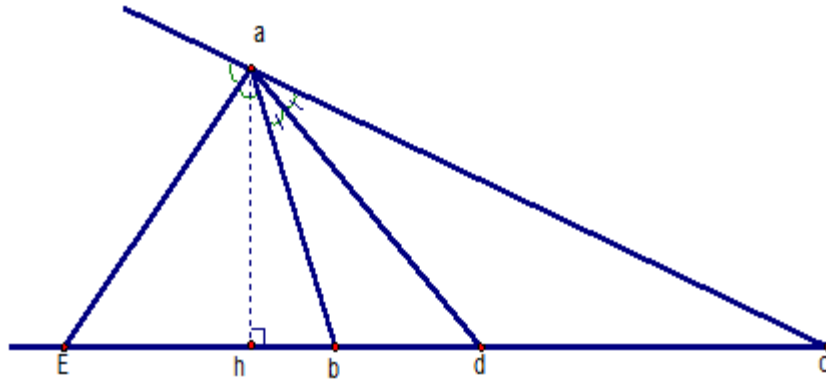
Từ giả thiết $\triangle ADE = \triangle BCF$ và dựa vào tính chất của đường trung bình trong tam giác ta có $\triangle HMP = \triangle HNQ$ (c.c.c)

Suy ra $MHP = NHQ \Rightarrow MHQ = NHP \Rightarrow MHN$ và PHQ có cùng tia phân giác

Mặt khác dễ có $IPHQ$ và $KMHN$ là các hình thoi.

Suy ra HK và HI lần lượt là phân giác của MHN và PHQ . Suy ra H , I , K thẳng hàng

Câu 5.



Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$. Pitago trong tam giác vuông AHD ta tính được $HD = 27\text{cm}$. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$. Suy ra

$$DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75\text{cm}$$

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75-x}{75+y} \quad (1)$$

Mặt khác $x + y = 40$ (2)

Thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x - 100) = 0$$

Do $x < 40$ nên $x = 15$, từ đó $y = 25$.

Vậy $DB = 15\text{cm}$, $DC = 25\text{cm}$

Câu 6.

Áp dụng Bunhiacopski cho hai dãy $a^2; 1$ và $1; 4$ ta có

$$(1^2 + 4^2)(a^4 + 1) \geq (a^2 + 4)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^4} \geq \frac{a^2+4}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Áp dụng Bunhiacopski cho $b^2; 1$ và $1; 4$ ta có

$$17(b^4 + 1) \geq (b^2 + 4)^2 \Rightarrow \sqrt{b^4+1} \geq \frac{b^2+4}{\sqrt{17}} \quad (2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow P \geq \frac{a^2+b^2+8}{\sqrt{17}} \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác theo giả thiết } (1+a)(1+b) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a+b+ab = \frac{5}{4}$$

Áp dụng Côsi ta có: $a \leq a^2 + \frac{1}{4}$; $b \leq b^2 + \frac{1}{4}$; $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức ta được

$$\frac{3}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2} \geq a + b + ab = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right): \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Thay vào (*) ta được: $P \geq \frac{\frac{1}{2} + 8}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$

Đề số 7

Câu 1.

a) Ta có $\frac{a}{x+y} = \frac{5}{x+z} = \frac{5-a}{z-y} = \frac{5+a}{2x+y+z}$

Suy ra $\frac{25}{(x+z)^2} = \frac{(5-a)(5+a)}{(z-y)(2x+y+z)} = \frac{25-a^2}{(z-y)(2x+y+z)} = \frac{16}{(z-y)(2x+y+z)}$

Suy ra $25 - a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Mặt khác $Q = \frac{a^6 - 2a^5 + a - 2}{a^5 + 1} = \frac{a^5(a-2) + (a-2)}{a^5 + 1} = \frac{(a-2)(a^5 + 1)}{a^5 + 1} = a - 2$, với $a \neq -1$

Với $a = 3$ thì $Q = 1$

Với $a = -3$ thì $Q = -5$

b) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \Rightarrow ab + bc + ca = 1$

$$\Rightarrow 1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c)$$

$$\Rightarrow 1 + b^2 = ab + bc + ca + b^2 = b(a+b) + c(a+b) = (a+b)(b+c)$$

$$\Rightarrow 1 + c^2 = ab + bc + ca + c^2 = b(a+c) + c(a+c) = (a+c)(b+c)$$

$$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2 = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$
 Vì a, b, c là

các số nguyên $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \text{ là số chính phương.}$$

Câu 2.

a) Ta có: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 258$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 258$.

b) + Phương trình được biến đổi thành: $(x+1)(x^2+1) = (2y+1)^2$

+ Ta chứng minh $(x+1)$ và (x^2+1) nguyên tố cùng nhau.

Vì nếu $d = \text{UCLN}(x+1, x^2+1)$ thì d phải là số lẻ (vì $2y+1$ lẻ)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1:d \\ x^2+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x:d \\ x^2+1:d \\ x+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1:d \\ x-1:d \end{cases} \Rightarrow 2:d \text{ mà } d \text{ lẻ nên } d = 1.$$

+ Nên muốn $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương

Thì $(x+1)$ và (x^2+1) đều phải là số chính phương

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x^2+1=k^2 \\ x+1=t^2 \end{cases} \Rightarrow (k+x)(k-x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ x=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

+ Với $x = 0$ thì $(2y+1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = -1$. (Thỏa mãn pt)

Vậy nghiệm của phương trình là: $(x; y) = \{(0; 0), (0; -1)\}$

Câu 3.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq 1$

Áp dụng bất Cauchy $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ Với $x \geq 0, y \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Ta có:

$$\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c}{b} - \frac{c}{a} \right)$$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right)$$

Cộng vế với vế hai bất ta được bất cần chứng minh:

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} \text{ và } \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$

b) Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Do $f(0) = e$ nên $e:7$

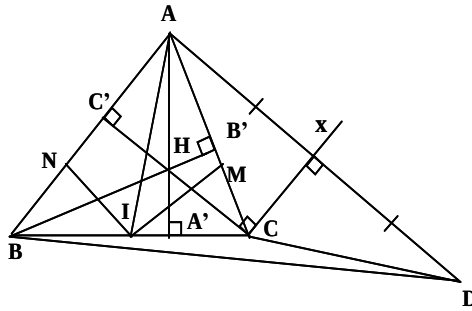
$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f(1) = a + b + c + d + e : 7 \\ f(-1) = a - b + c - d + e : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c : 7 \\ b + d : 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e : 7 \\ f(-1) = 16a - 8b + 4c - 2d + e : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + c : 7 \\ 4b + d : 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c : 7 \\ 4a + c : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a : 7 \\ c : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : 7 \\ c : 7 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} b + d : 7 \\ 4b + d : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b : 7 \\ d : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b : 7 \\ d : 7 \end{cases}$$

Vậy các hệ số của $f(x)$ đều chia hết cho 7.

Câu 4.



a) Ta có:
$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'};$$

Tương tự:
$$\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}; \quad \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}$$

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các $\triangle ABC$, $\triangle ABI$, $\triangle AIC$:

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \quad \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

- Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC$, $AD = 2CC'$

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

- $\triangle BAD$ vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2 \Rightarrow AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$\Rightarrow 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

Tương tự: $4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$

$$4BB'^2 \leq (AB+BC)^2 - AC^2$$

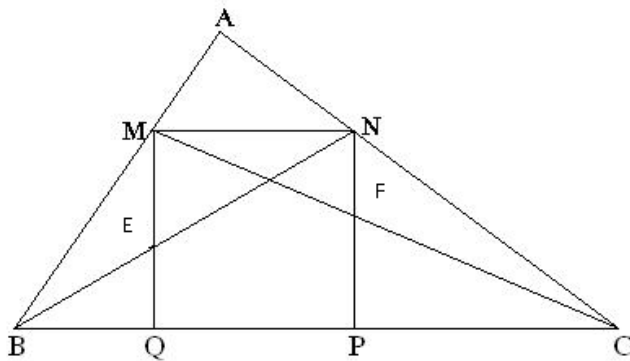
- Chứng minh được : $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB+BC+AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB+BC+CA)^2}{(AA')^2 + (BB')^2 + (CC')^2} \geq 4$$

Vậy GTNN của $\frac{(AB+BC+CA)^2}{(AA')^2 + (BB')^2 + (CC')^2} = 4$

Đẳng thức xảy ra khi $BC = AC$, $AC = AB$, $AB = BC$ hay $AB = BC = CA$ tức là ΔABC đều

Câu 5.



Áp dụng định lí Talet ta có : $\frac{ME}{EQ} = \frac{MN}{BQ}$ (1); $\frac{PF}{FN} = \frac{PC}{MN}$ (2)

Vì $ME = PF \Rightarrow \frac{ME}{EQ} = \frac{PF}{FN}$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \frac{MN}{BQ} = \frac{PC}{MN} \Leftrightarrow \frac{MQ}{QB} = \frac{PC}{NP}$

Suy ra hai tam giác vuông ΔBMQ và ΔNCP đồng dạng với nhau

$\Rightarrow \angle MBQ + \angle NCP = \angle CNP + \angle NCP = 90^\circ$

Suy ra : ΔABC vuông tại A

Đề số 8

Câu 1.

a) Ta có: $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{x}-9+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $(x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$.

b) Với $(x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$ Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 = -\sqrt{x}+3 \\
&\Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (t/m)}
\end{aligned}$$

Vậy $A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

Câu 2.

a) Ta có $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{5-2\sqrt{15}+3} - \sqrt{5+2\sqrt{15}+3} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{5}-\sqrt{3} - \sqrt{5}-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

b) Ta có: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow (x^2 - x)^3 = 1 \Rightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = 1$.

Mặt khác: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^6 = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Suy ra: $P = \frac{1+2015}{1+2015} = \frac{2016}{2016} = 1$.

c) Điều kiện: $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$

+ Nếu $x > 3$: Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$x^2 + \frac{9x^2}{x^2-9} + \frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}} = 72 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-9} + 6 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} - 72 = 0$$

Đặt $t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ ($t > 0$), được phương trình: $t^2 + 6t - 72 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Khi đó: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} = 6 \Leftrightarrow x^4 - 36x^2 + 324 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 18$.

Trong trường hợp này tìm được: $x = 3\sqrt{2}$

+ Nếu $x < -3$: Khi đó: $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} < 0 < 6\sqrt{2}$: PT vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 3\sqrt{2}$.

Câu 3.

a) Ta có: $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n - 4)(n + 2)(n + 6)$.

Thử với $n = 1; 2; 3$ thì F đều không chia hết cho 125.

Thử với $n = 4$ thì $F = 0$ chia hết cho 125.

Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm là: $n = 4$.

b) Ta có: $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$$= n^4(n^2 - 1) + 2n^2(n + 1)$$

$$= n^2(n + 1)(n^3 - n^2 + 2)$$

$$= n^2(n + 1)[(n + 1)(n^2 - 2n + 2)]$$

$$= n^2(n + 1)^2(n^2 - 2n + 2) = n^2(n + 1)^2[(n - 1)^2 + 1]$$

Ta có: $(n - 1)^2 < (n - 1)^2 + 1 = n^2 + 2(1 - n) < n^2$ (vì $n > 1$)

$\Rightarrow (n - 1)^2 + 1$ không thể là số chính phương

Vậy A không thể là số chính phương

Câu 4.

a) Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$.

$\triangle ABD$ vuông tại D có $AD = AB \cdot \sin B$, do đó S_{ABC}

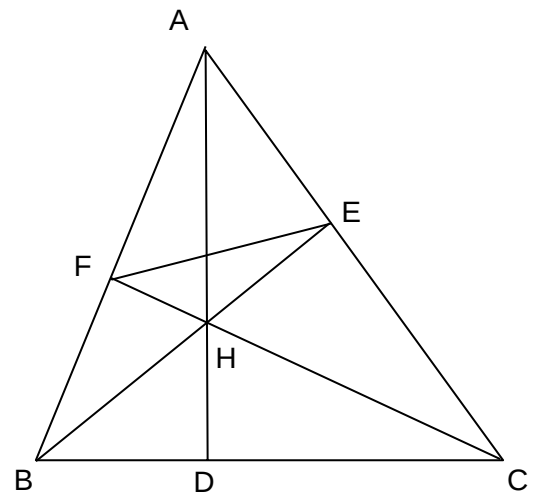
$$= \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin A.$$

$\triangle ABE$ vuông ở E có $AE = AB \cdot \cos A$

$\triangle BFC$ vuông ở F có $BF = BC \cdot \cos B$

$\triangle ACD$ vuông ở D có $CD = AC \cdot \cos C$

Do đó $AE \cdot BF \cdot CD = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.



b) Xét $\triangle ABD$ có $\tan B = \frac{AD}{BD}$; $\triangle ACD$ có $\tan C = \frac{AD}{CD}$

$$\text{suy ra } \tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD} \quad (1)$$

Do $\angle HBD = \angle CAD$ (cùng phụ với $\angle ACB$) nên $\triangle BDH \sim \triangle ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BD \cdot DC = DH \cdot DA$$

$$\text{Kết hợp với (1) được } \tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{DH \cdot AD} = \frac{AD}{DH}.$$

c) Chứng minh được $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g.g) $\Rightarrow AEF = ABC$.

Tương tự được $CED = CBA$ nên $AEF = CED$ mà $BE \perp AC \Rightarrow AEB = CEB = 90^\circ$.

Từ đó suy ra $FEB = DEB \Rightarrow EH$ là phân trung của $\triangle DEF$.

Tương tự DH, FH cũng là phân giác trong của $\triangle DEF$ nên H là giao ba đường phân giác trong của $\triangle DEF$.

d) Ta có : $S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB} = S_{ABC}$.

$$\text{Để thấy } \triangle CHE \sim \triangle CAF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} = \frac{HB \cdot CE}{AB \cdot CF} = \frac{2 \cdot S_{BHC}}{2 \cdot S_{ABC}} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tương tự có } \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot BA} = \frac{S_{CHA}}{S_{CBA}}; \frac{HA \cdot HB}{CA \cdot CB} = \frac{S_{HAB}}{S_{CAB}}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot BA} + \frac{HA \cdot HB}{CA \cdot CB} = \frac{S_{BHC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{CHA}}{S_{CBA}} + \frac{S_{AHB}}{S_{ACB}} = 1$$

Câu 5.

Đặt $a = \sqrt{x^2 + y^2}; b = \sqrt{y^2 + z^2}; c = \sqrt{z^2 + x^2} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $a + b + c = 2015$.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

$$\text{Do đó: } (y + z)^2 \leq 2(y^2 + z^2) = 2b^2 \Rightarrow y + z \leq \sqrt{2}b \Rightarrow \frac{x^2}{y + z} \geq \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2b\sqrt{2}}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^2}{z + x} \geq \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c\sqrt{2}}, \frac{z^2}{x + y} \geq \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2a\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2b\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2a\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{a + b + c}{\sqrt{2}}$$

$$\geq \frac{1}{6\sqrt{2}}(a + b + c)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{2015}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}(a + b + c)(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{2015}{\sqrt{2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{6\sqrt{2}} 2015 \cdot 9 - \frac{2015}{\sqrt{2}} = \frac{2015}{2\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2015}{3}$.

Vậy $\min T = \frac{2015}{2\sqrt{2}}$ khi $x = y = z = \frac{2015}{3\sqrt{2}}$.

Đề số 9

Câu 1.

1) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}\right]\left[(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}\right]} \\ &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)} - \frac{n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

2) Từ kết quả câu 1, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{1}{2017\sqrt{2016} + 2016\sqrt{2017}} &= \frac{1}{\sqrt{2016}} - \frac{1}{\sqrt{2017}} \\ \frac{1}{2018\sqrt{2017} + 2017\sqrt{2018}} &= \frac{1}{\sqrt{2017}} - \frac{1}{\sqrt{2018}} \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên, vế theo vế ta được

$$S_{2018} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2018}} = \frac{\sqrt{2018} - 1}{\sqrt{2018}} = \frac{2018 - \sqrt{2018}}{2018}$$

c) Ta có $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Khi n là số chính phương thì rõ ràng S_n là số hữu tỉ

Chẳng hạn $n = 36 \Rightarrow S_n = \frac{5}{6}$

Câu 2.

1) Ta có:

$$x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 6\sqrt{x+5} + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{x+5}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

2) Ta có:

$$10x^2 + y^2 + z^2 < 2x + 4y + 6xz - 4 \Leftrightarrow 10x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x + 4y + 6xz - 5$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-2=0 \\ z-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Câu 3.

1) Ta có: $A = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)$ Đặt $y = x^2 - 5x + 4$ thì

$$A = y(y+2) = y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y+1)^2 - 1 \geq -1$$

$$\text{Min} A = -1 \Leftrightarrow y = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

2) Đặt $x = b + c - a$; $y = a + c - b$; $z = a + b - c$ ($x, y, z > 0$)

Khi đó: $x + y + z = a + b + c$

$$\text{Và } 2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

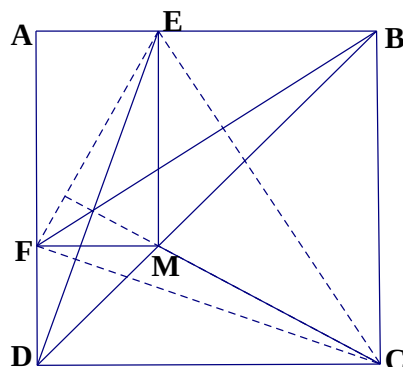
$$\text{Tương tự } b = \frac{x+z}{2} \quad c = \frac{x+y}{2}$$

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 6$$

BĐT cuối cùng đúng theo kết quả của BĐT phụ: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Câu 4.



1. Chứng minh: $AE = FM = DF$

$$\Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC \Rightarrow đpcm$$

2. c/m được DE, BF, CM là ba đường cao của $\Delta EFC \Rightarrow đpcm$

3. Gọi cạnh hình vuông ABCD là a

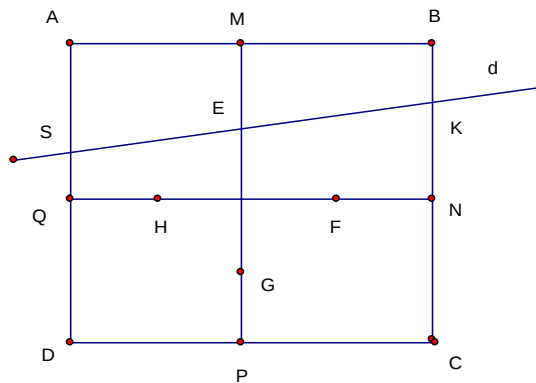
Có Chu vi hình chữ nhật AEMF = 2a không đổi

$$\Rightarrow ME + MF = a \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow ME = MF \text{ (AEMF là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của BD.}$$

Câu 5.



Giả sử hình vuông ABCD có cạnh là a ($a > 0$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong 2018 đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K

$$\text{sao cho } S_{CDSK} = 3S_{ABKS}$$

$$\text{Từ } S_{CDSK} = 3S_{ABKS} \Rightarrow DS + CK = 3(AS + BK)$$

$$\Leftrightarrow a - AS + a - BK = 3(AS + BK) \Leftrightarrow AS + BK = \frac{1}{2}a$$

$$\Leftrightarrow EM = \frac{1}{4}a \Rightarrow E \text{ cố định và d đi qua E}$$

$$\text{Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho } FN = GP = HQ = \frac{a}{4}$$

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H.

Theo nguyên lý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề

$$\text{bài phải có ít nhất } \left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505 \text{ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm}$$

E, F, G, H cố định, nghĩa là 505 đường thẳng đó đồng quy

Đề số 10

Câu 1.

1) Ta có

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}+1-1} \\&= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1 - \sqrt{\sqrt{3}+1}+1}{1} = 2\end{aligned}$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức A ta được

$$A = (2^2 - 2 - 1)^{2018} + 2019 = 1 + 2019 = 2020$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x^2 + 2019})(y + \sqrt{y^2 + 2019}) &= 2019 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 + 2019})(x + \sqrt{x^2 + 2019})(y + \sqrt{y^2 + 2019}) &= 2019(x - \sqrt{x^2 + 2019}) \\ -2019(y + \sqrt{y^2 + 2019}) &= 2019(x - \sqrt{x^2 + 2019}) \\ \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 + 2019} &= \sqrt{x^2 + 2019} - x\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } x + \sqrt{x^2 + 2019} = \sqrt{y^2 + 2019} - y$$

$$\text{Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được } x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow x^{2019} + y^{2019} = 0.$$

Câu 2.

a) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (điều kiện $y \geq 1$)

Ta có phương trình:

$$\begin{aligned}(4x-1)y &= 2y^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2y^2 - 4xy + 2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-2x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow y - 2x + 1 &= 0 \text{ (vì } y \geq 1)\end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

2) Điều kiện $x, y \geq 0$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2019} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{2019} - \sqrt{x}$$

$$\text{Bình phương hai vế ta được } y = 2019 + x - 2\sqrt{2019x} \Rightarrow \sqrt{2019x} \in \mathbb{N}$$

Vì $2019 = 3.673$ và $(3; 673) = 1$

Nên $x = 3.673.n^2 = 2019n^2$ (với $n \in \mathbb{N}$)

Tương tự: $y = 3.673.m^2 = 2019m^2$

Thay vào ta được

$$m+n=1 \Rightarrow (m;n) \in \{(0;1);(1;0)\} \Rightarrow (x;y) \in \{(0;2019);(2019;0)\}$$

Câu 3.

a) Đặt $S = 1.2.3.4....12 \Rightarrow \frac{S}{100} = 3.4.6.7.8.9.12$ (1) là một số nguyên

Suy ra hai chữ số tận cùng của S là 00

Mặt khác, trong suốt quá trình nhân liên tiếp các thừa số ở vế phải của (1), nếu chỉ để ý đến chữ số tận cùng ta thấy $\frac{S}{100}$ có chữ số tận cùng là 6 (vì

$$3.4=12; 2.6=12; 2.7=14; 4.8=32; 2.0=18; 8.11=88; 8.12=96)$$

Vậy ba chữ số tận cùng của S là 600.

b) Do $a, b, c \in [-1; 2]$

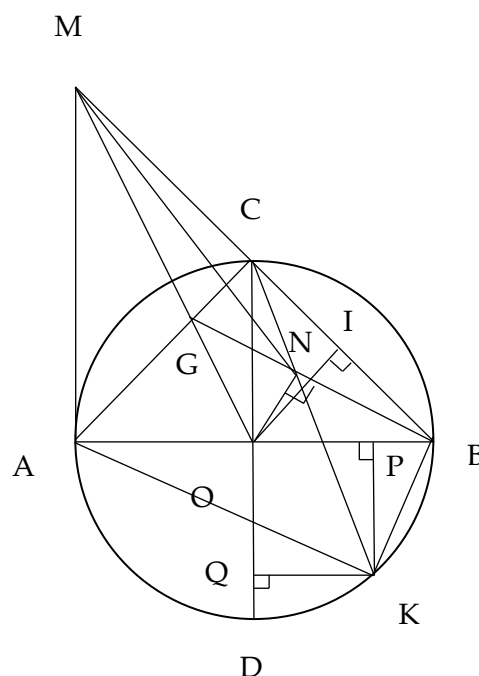
$$\text{Nên } a+1 \geq 0; a-2 \leq 0 \Rightarrow (a+1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq a+2$$

$$\text{Tương tự: } b^2 \leq b+2; c^2 \leq c+2$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = 6 \Rightarrow a + b + c \geq 0.$$

Câu 4.



a) Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI$ là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow OI // BC \text{ và } OI = \frac{1}{2}BC$$

$$\text{Chứng minh } GC = 2GI \Rightarrow OI = \frac{1}{2}CM \Rightarrow CB = CM.$$

Xét $\triangle ABM$ có $OA=OB=R$ và $CB=CM$ nên OC là đường trung bình

$$\Rightarrow OC // AM \text{ mà } OC \perp AB \Rightarrow AM \perp AB$$

$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$

b) Từ K hạ lần lượt các đường vuông góc với AB và CD tại P và Q .

* Chứng minh: $\triangle AKB$ vuông tại K theo định lý Pitago ta có:

$$KA^2 + KB^2 = AB^2 \Rightarrow KA^2 + KB^2 = 4R^2 \Rightarrow KA^4 + KB^4 + 2KA^2 \cdot KB^2 = 16R^4$$

Mặt khác:

$$KA \cdot KB = AB \cdot KP = 2R \cdot KP \Rightarrow KA^2 \cdot KB^2 = 4R^2 \cdot KP^2$$

$$\Rightarrow KA^4 + KB^4 + 2KA^2 \cdot KB^2 = KA^4 + KB^4 + 8R^2 \cdot KP^2$$

$$\Rightarrow KA^4 + KB^4 = 16R^4 - 8R^2 \cdot KP^2$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } KC^4 + KD^4 = 16R^4 - 8R^2 \cdot KQ^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } KA^4 + KB^4 + KC^4 + KD^4 = 32R^4 - 8R^2 (KP^2 + KQ^2)$$

Xét tứ giác $KPOQ$ có: $O=P=Q$ nên tứ giác $KPOQ$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow KP^2 + KQ^2 = PQ^2 = KO^2 = R^2$$

$$KA^4 + KB^4 + KC^4 + KD^4 = 32R^4 - 8R^2 \cdot R^2 = 24R^4.$$

c) Chứng minh $AM=AB$

Kéo dài BG cắt đường tròn tại F cắt AM tại E

* Chứng minh E là trung điểm của $AM \Rightarrow EA=BO$

* Chứng minh $EAF = OBN \Rightarrow AF = NB$

* Chứng minh $\triangle AFN$ vuông cân $\Rightarrow FNA = 45^\circ \Rightarrow ANB = 45^\circ$.

* Chứng minh $\triangle MAF = \triangle BAN$ ($c-g-c$) $\Rightarrow MFA = ANB = 135^\circ$.

$$\text{Mà } AFN = 90^\circ \Rightarrow MFN = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$$

$$\text{Chứng minh } \triangle MFN = \triangle MFA$$
 ($c-g-c$) $\Rightarrow MN = MA$

$$\text{Mà } MA = AB = 2R \Rightarrow MN = 2R.$$

Câu 5.

Các đại biểu ứng với 6 điểm A, B, C, D, E, F .

Hai đại biểu X và Y nào đó quen nhau thì ta tô đoạn thẳng XY màu xanh còn nếu X và Y không quen nhau thì ta tô đoạn thẳng XY màu đỏ.

Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF theo Nguyên lý Dirichlet thì tồn tại ba đoạn cùng màu

* Giả sử AB, AC, AD màu xanh

Xét 3 điểm B, C, D : Vì 3 đại biểu nào cũng có hai người quen nhau suy ra một trong ba đoạn BC, CD, DB màu xanh.

Giả sử BC màu xanh thì suy ra A, B, C đôi một quen nhau.

* Còn nếu AB, AC, AD màu đỏ suy ra B, C, D đôi một quen nhau.

Đề số 11

Câu 1. Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$x = 3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2} + 1$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nguyên thì $(\sqrt{x}-1)$ là ước của 2 và $(\sqrt{x}-1) > -1$

$$\text{Do đó: } (\sqrt{x}-1) \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow x \in \{1; 4; 9\}$$

Mặt khác theo điều kiện $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x = 4 \vee x = 9$

Vậy để P nguyên thì $x = 4$ hoặc $x = 9$

Câu 2.

a) Điều kiện $4 \leq x \leq 6$

Ta có: $VT = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 5$.

Mặt khác: Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski ta có:

$$VP = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq \sqrt{(1^2+1^2)\left[(\sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2\right]} = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{\sqrt{6-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow 6-x = x-4 \Leftrightarrow x = 5$

Do đó phương trình có nghiệm khi $VT = VP = 2$ khi đó $x = 5$.

Vậy $x = 5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Điều kiện $x \geq 0$.

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x ta được:

$$x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{x}\right) - \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) - 2 = 0 \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x + 4 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} = t^2 - 4$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow (t^2 - 4) - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 & (\text{TM}) \\ t = -2 & (\text{loại}) \end{cases}$

Với $t = 3$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 4$ và $x = 1$.

Câu 3.

a) Ta có:

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2) \quad (*)$$

Vế trái của (*) là một số chính phương, vế phải (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên

phải có một trong hai số bằng 0. Do đó: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

Vậy có 2 cặp nghiệm nguyên $(x, y) = (-1; 1), (-2; 2)$.

b) Điều kiện $x > 1; y > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0; y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} > 0; \frac{x-1}{y} > 0; \frac{1}{y^3} > 0$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương:

$$\frac{1}{(x-1)^3} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^3} \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \geq \frac{3}{x-1} - 2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \geq \frac{3(x-1)}{y} - 2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{y^3} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{y^3} \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} \geq \frac{3}{y} - 2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} &\geq \frac{3}{x-1} - 6 + \frac{3(x-1)}{y} + \frac{3}{y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} &\geq \frac{3-6x+6}{x-1} + \frac{3x}{y} = 3\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2, y = 1$.

c) Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không phải số nguyên tố

$n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố

Xét $n > 1$ ta có:

$$A = n^{2012} - n^2 + n^{2002} - n + n^2 + n + 1 = n^2 \left[(n^3)^{670} - 1 \right] + n \left[(n^3)^{667} - 1 \right] + (n^2 + n + 1)$$

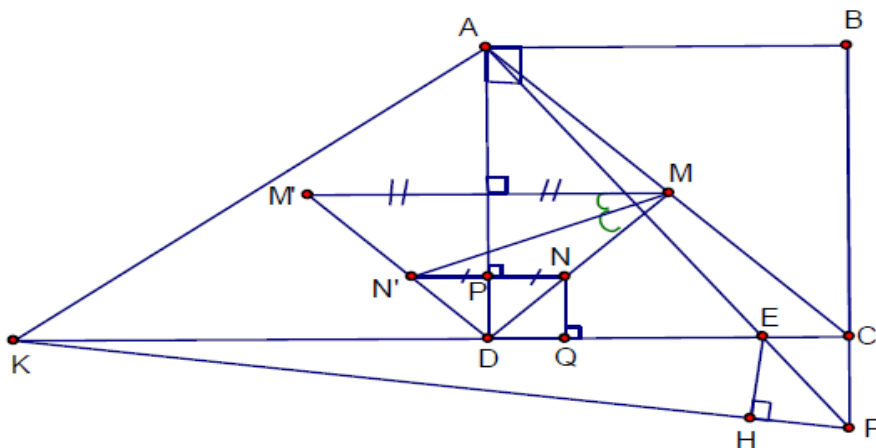
Mà $\left[(n^3)^{670} - 1 \right]$ chia hết cho $(n^3 - 1)$ suy ra $\left[(n^3)^{670} - 1 \right]$ chia hết cho $(n^2 + n + 1)$

Tương tự: $\left[(n^3)^{667} - 1 \right]$ chia hết cho $(n^2 + n + 1)$

Do đó với $n > 1$ thì A chia hết cho $(n^2 + n + 1)$ nên A là hợp số.

Vậy $n = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.



a) Để chứng minh $\triangle ABF = \triangle ADK$ (g.c.g) $\Rightarrow AF = AK$

Ta giác KAE có đường cao AD nên:

$$\frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} \text{ (không đổi)}$$

b) Để chứng minh được: $S_{KEF} = \frac{1}{2} KE.EF.\sin AKE = \frac{1}{2} .KE.EF.\cos AKE$

$$\text{Mặt khác: } S_{KEF} = \frac{1}{2} EH.KF = \frac{1}{2} EH.(KH + HF). \text{ suy ra:}$$

$$KE.EF.\cos AKE = \frac{1}{2} EH.(KH + HF) \Leftrightarrow \cos AKE = \frac{EH.KH + EH.HF}{KE.EF}$$

$$\Leftrightarrow \cos AKE = \frac{EH}{EF} \cdot \frac{KH}{EK} + \frac{EH}{KE} \cdot \frac{HF}{EF} = \sin EFK.\cos EKF + \sin EKF.\cos EFK$$

c) Đã sử dụng được điểm N thỏa mãn $NP + NQ = NM$

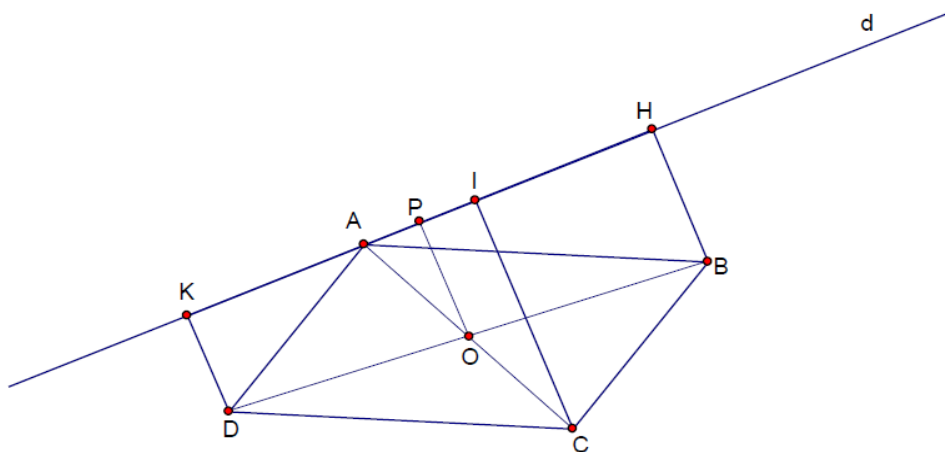
Lấy N' đối xứng với N; M' đối xứng với M qua AD suy ra tam giác $NN'M$ cân

tại N suy ra MN' là phân giác của $\angle DMM'$. Suy ra cách dựng điểm N như sau:

- Dựng M' đối xứng với M qua AD
- Dựng phân giác góc $\angle DMM'$ cắt DM' tại N'
- Dựng N đối xứng với N' qua AD

Chú ý: Học sinh có thể không trình bày phân tích mà chỉ trình bày cách dựng vẫn cho điểm tối đa.

Câu 5.



Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình bình hành, kẻ OP vuông góc với d tại P.

Ta có OP là đường trung bình của hình thang DKHB nên $DK + BH = 2OP$

Lại có OP là đường trung bình của tam giác ACI nên $CI = 2OP$

Do đó: $DK + BH + CI = 4OP$

Mà $OP \leq AO$ nên $BH + CI + DK \leq 4AO$. Vậy $\text{Max}(BH + CI + DK) = 4AO$

Đạt được khi $P \equiv A$ hay $d \perp AC$

Đề số 12

Câu 1.

1. a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-7\sqrt{x}+6-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có $P = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

$$P(\sqrt{x}+3)=m \Leftrightarrow 2-5\sqrt{x}=m \Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2-m \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{2-m}{5} \Leftrightarrow m \leq 2$$

$$\text{Lại có: } x \neq 1 \Leftrightarrow \frac{2-m}{5} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3$$

Vậy $m \leq 2; m \neq -3$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{Ta có: } a &= \sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}} \Leftrightarrow a^3 = 6 - 6\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}\right) \\ &\Leftrightarrow a^3 + 6a - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó: } f(a) = (a^3 + 6a - 7)^{2012} = (a^3 + 6a - 6 - 1)^{2012} = 1.$$

Câu 2.

1. Đặt $\sqrt{x^2+9} = y$ (với $y \geq 3$)

$$\text{Khi đó, ta có: } y^2 + 5x = (x+5)y \Leftrightarrow (y-5)(y-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=x \end{cases}$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là: $x = \pm 4$.

2. Ta có: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

$$\Leftrightarrow 2y^2(x-1) - x(x-1) - y(x-1) + 1 = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của PT (1). Chia cả 2 vế của phương trình cho $x - 1$, ta được:

$$2y^2 - x - y + \frac{1}{x-1} = 0 \quad (2)$$

PT có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\frac{1}{x-1}$ nguyên nên $x - 1$ thuộc $\{-1; 1\}$

- $x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$

- $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Thay $x = 0$ vào PT(2) ta được: $2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1; y = -\frac{1}{2}$

Thay $x = 2$ vào PT(2) ta được: $2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1; y = -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x, y) \in \{(0, 1); (2, 1)\}$

Câu 3.

1. ĐK: $x \neq 0$

Đặt $a = x + \sqrt{2012}$, $b = \frac{13}{x} - \sqrt{2012}$

Thay $x = a - \sqrt{2012}$ vào biểu thức b , ta được:

$$b = \frac{13}{a - \sqrt{2012}} - \sqrt{2012} \Leftrightarrow ab - 2025 = (b - a)\sqrt{2012}$$

Để $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $a = b$, do đó $ab - 2025 = 0$

Từ đó, suy ra $a = b = \pm 45 \Rightarrow x = \pm 45 - \sqrt{2012}$

Thử lại với $x = \pm 45 - \sqrt{2012}$ thì thấy a, b là số nguyên.

2. Xét tích:

$$\begin{aligned} (x-1)(y-1)(z-1) &= xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 \\ &= x + y + z - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (\text{vì } xyz = 1) \end{aligned}$$

$$\text{mà } x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) > 0$$

Nếu cả 3 thừa số: $(x-1), (y-1), (z-1)$ đều dương $\Rightarrow xyz > 1$ (loại)

Nếu cả 3 thừa số: $(x-1), (y-1), (z-1)$ đều âm $\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) < 0$ (loại)

Nếu 2 thừa số dương, 1 thừa số âm $\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) < 0$ (loại)

Nên phải có 2 thừa số âm, 1 thừa số dương $\Rightarrow$ trong 3 số x, y, z có hai số bé hơn 1.

Còn một số lớn hơn 1.

Vậy trong 3 số x, y, z có duy nhất một số lớn hơn 1.

Câu 4.

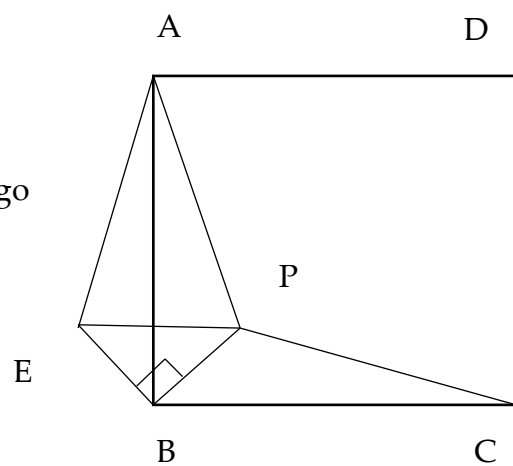
1.a) Lấy điểm E khác phía với điểm P đối với đường thẳng AB sao cho $\triangle BPE$ vuông cân tại B.

Ta có $\triangle BPC = \triangle BEA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle BEA = 135^\circ$$

Do $\angle BEP = 45^\circ$ nên $\angle PEA = 90^\circ$

$\triangle AEP$ vuông tại E. Theo định lý Py - Ta - go ta có:



$$\begin{aligned} AP^2 &= AE^2 + EP^2 \\ &= CP^2 + 2BP^2 \end{aligned}$$

P

1.b. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau:

Giả sử I là điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD. Qua I kẻ các đường thẳng MN, PQ tương ứng song song với AB, AD. Gọi diện tích hình chữ nhật IPBN là S_1 , diện tích hình chữ nhật IQDM là S_2 .

Ta có $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi I thuộc đường chéo AC.

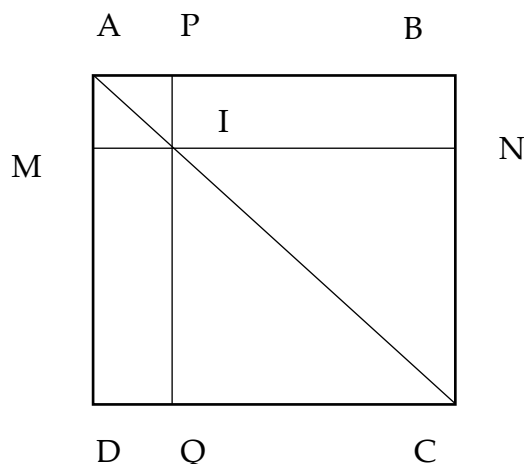
Thật vậy: Giả sử I thuộc đường chéo AC. Vì đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_1 = S_2$.

Ngược lại, giả sử $S_1 = S_2$, suy ra: $IN \cdot IP = IM \cdot IQ$

$$\Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{IQ}{IP} = \frac{NC}{MA}$$

Suy ra $\triangle MAI$ đồng dạng với $\triangle NIC$ (c.g.c) $\Rightarrow MIA = NIC$

Do M, I, N thẳng hàng nên A, I, C thẳng hàng.



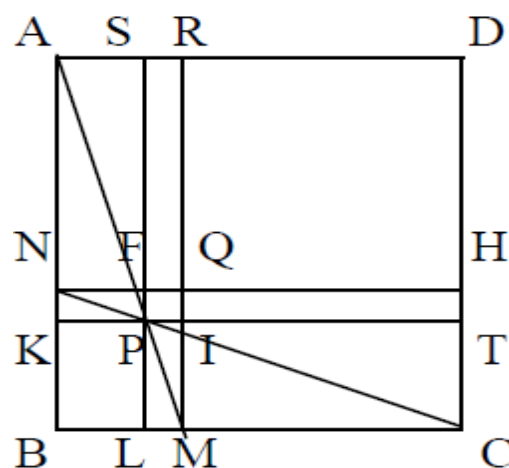
Trở lại bài toán:

Dễ thấy tứ giác NBMQ là hình chữ nhật. Qua P và Q kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Do P thuộc đường chéo AM của hình chữ nhật ABMR nên $S_{BLPK} = S_{PIRS}$ (1)

P thuộc đường chéo CN của hình chữ nhật NBCH nên $S_{BLPK} = S_{PTHF}$ (2)

Từ (1)&(2) suy ra: $S_{PIRT} = S_{PTHF}$

$$\Rightarrow S_{FQRS} = S_{QITH}.$$



Theo nhận xét trên, suy ra Q thuộc đường chéo PD của hình chữ nhật SPTD, tức PQ qua điểm D.

2) Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$\angle A \geq \angle B \geq \angle C \Rightarrow \hat{A} \geq 60^\circ$$

$$\text{TH1: } 60^\circ \leq \hat{A} < 90^\circ$$

Kẻ $CH \perp AB$, $BK \perp AC$.

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} CH.AB$$

Mà $CH \leq CC_1 \leq 1$, ta có:

$$AB = \frac{BK}{\sin A} \leq \frac{BB_1}{\sin A} \leq \frac{1}{\sin A} \leq \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

TH2: $\hat{A} \geq 90^\circ \Rightarrow AB \leq BB_1 \leq 1; CH \leq CC_1 \leq 1$.

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2). \text{ Từ (1) \& (2) suy ra } S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 5.

Ta chứng minh hai bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} \geq \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} \quad (1) \quad \sqrt{\frac{y^3}{y^3 + (x+y)^3}} \geq \frac{y^2}{x^2 + 2y^2} \quad (2)$$

$$\text{Thật vậy BĐT (1)} \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3 + 8y^3} \geq \frac{x^4}{(x^2 + 2y^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad (\text{đúng với mọi } x, y)$$

$$\text{BĐT (2)} \Leftrightarrow \frac{y^3}{y^3 + (x+y)^3} \geq \frac{y^4}{(x^2 + 2y^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + 3y^2) \geq y(x+y)^3$$

$$\text{Do } x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 + 2y^2 \geq 2y(x+y)$$

$$\text{Nên } (x^2 + y^2)(x^2 + 3y^2) \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \cdot 2y(x+y) = y(x+y)^3$$

Suy ra BĐT (2) luôn đúng.

Từ (1) và (2) ta được $Q \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Vậy min $P = 1$ khi $x = y$.

Đề số 13

Câu 1.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Ta có

$$\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; x \neq 1 \\ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x} - (\sqrt{x}+1)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=9 \text{ (tm)}$$

Vậy $x=9$ thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \geq -1$

$$\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{(x+1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{x+1}-1) + \sqrt{x+3}(1-\sqrt{x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)(2x-\sqrt{x+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-1=0 \\ 2x-\sqrt{x+3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0; x=1$

b) Ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ y - \frac{1}{y} = 0 \\ z - \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $P = x^{2017} + y^{2018} + z^{2019} = 3$ khi $x = y = z = 1$

Hoặc $P = x^{2017} + y^{2018} + z^{2019} = 1$ khi $x = y = z = -1$

Câu 3.

a) Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 3k + 2$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 9k + 4$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 15k + 8$ không chia hết cho 3.

Do đó A không chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Vậy A không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n .

b) Nếu $y = 2k (k \in \mathbb{Z})$, suy ra VT là số chẵn (vô lí)

Nếu $y = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$, suy ra

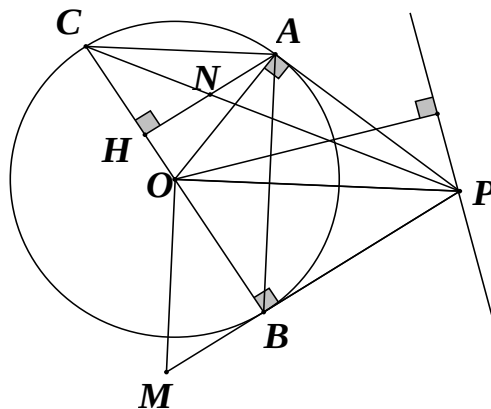
$$\begin{aligned} y^{1009} = 2n + 1 &\Rightarrow 2017y^{2018} = 2017 \cdot (2n + 1)^2 \\ &\Rightarrow 2017y^{2018} = 2017 \cdot (4n^2 + 4n + 1) = 4 \cdot 2017 \cdot (n^2 + n) + 2017 \end{aligned}$$

Mà 2017 chia cho 4 dư 1, suy ra VT chia cho 4 dư 1.

Còn VP = 2019 chia cho 4 dư 3 (vô lí)

Vậy phương trình trên không có nghiệm nguyên.

Câu 4.



a) Gọi CP cắt AH tại N

Ta có $OA = OB = R$; $AP = PB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra OP là đường trung trực của AB hay $OP \perp AB$ tại K .

Xét $\triangle ACH$ và $\triangle POB$ có

$$AHC = PBO = 90^\circ$$

$ACH = POB$ (cùng phụ với ABC)

$$\text{Do đó } \triangle ACH \text{ đồng dạng } \triangle POB \text{ (g.g)} \quad \frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB} \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle CPB \text{ có } AH \parallel BP \text{ (gt) nên } \frac{NH}{PB} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow \frac{2NH}{PB} = \frac{CH}{OB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH=2NH$ hay $AN=NH$.

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A với đường cao AH có:

$$AH^2 = BH \cdot CH = (2R - CH) \cdot CH \quad (3)$$

Từ (2) ta có $CH = 2 \frac{NH \cdot OB}{PB}$ thay vào (3), kết hợp với $AH=2NH$ ta được:

$$\begin{aligned} AH^2 &= \left(2R - \frac{AH \cdot CB}{2PB} \right) \left(\frac{AH \cdot CB}{2PB} \right) \\ \Leftrightarrow 4PB^2 \cdot AH^2 &= (4R \cdot PB - AH \cdot CB) \cdot AH \cdot 2R = 8R^2 \cdot PB \cdot AH - 4R^2 \cdot AH^2 \\ \Leftrightarrow PB^2 \cdot AH &= 2R^2 \cdot PB - R^2 \cdot AH \\ \Leftrightarrow AH(PB^2 + R^2) &= 2R^2 \cdot PB \end{aligned}$$

Thay $PB^2 = m^2 - R^2$ vào đẳng thức trên ta được $AH = \frac{2R^2}{m^2} \sqrt{m^2 - R^2}$

$$\text{c) Ta có } S_{MOP} = \frac{1}{2} MP \cdot OB = \frac{1}{2} (PB + BM) \cdot OA = \frac{1}{2} (PB + BM) \cdot R \quad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{2} (PB + BM) \geq \sqrt{PB \cdot BM} \quad (5)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PB=BM$

$$\triangle MOP \text{ vuông tại } O \text{ với } OB \perp PB \text{ có: } PB \cdot MB = OB^2 = R^2 \quad (6)$$

Từ (4); (5); (6) suy ra $S_{MOP} \geq R^2$

Do đó $\min S_{MOP} = R^2 \Leftrightarrow PB = MB = R$

$$\Leftrightarrow \triangle PBO \text{ vuông cân tại } B \Leftrightarrow OP = R\sqrt{2}$$

Vậy diện $\triangle MOP$ có diện tích nhỏ nhất $\Leftrightarrow OP = R\sqrt{2}$. Khi đó P là chân đường vuông góc hạ từ O đến đường thẳng d .

Câu 5.

$$\text{a) Từ giả thiết suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow 3 \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

$$\text{Ta thấy } \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự ta được: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ac}{2}$$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$P \geq a + b + c - \frac{1}{2}(ab + bc + ca) + \frac{1}{2}(ab + bc + ca) = 3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

b) Có 1009 số lẻ trên bảng lúc đầu

Mỗi lần các phép toán được thực hiện, số các số lẻ còn lại hoặc giữ nguyên như vậy (khi các số này đưa ra là không cùng lẻ) hoặc giảm đi hai (khi các số đưa ra là cùng lẻ)

Vì vậy số các số lẻ còn lại trên bảng sau mỗi phép toán luôn là lẻ.

Bởi vậy, khi thực hiện quy tắc trên một số còn lại thì nó phải là lẻ và vì thế không thể là số 0.

Đề số 14

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; y \geq 0, xy \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \left(\frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2.$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{5-2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+2}{13}.$$

Câu 2.

a) ĐK: $4 \leq x \leq 6$

$$VT = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 5$$

$$VP = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq \sqrt{(1^2+1^2) \left[(\sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2 \right]} = 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6-x}} = \frac{1}{\sqrt{4-x}} \Leftrightarrow 6-x = x-4 \Leftrightarrow x = 5 (\text{tm}).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

b) Ta có:

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2) \quad (*)$$

VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên

$$\text{phải có một số bằng 0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$.

Câu 3.

a) Ta có

$+d$ là số nguyên tố và $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d = 5$.

$$+\overline{abcd} < 10000 = 100^2 \Rightarrow \overline{abcd} = (\overline{x5})^2; \text{ với } x \in \{1; 2; 3; 4; \dots; 9\}$$

$$+\text{ Vì } \overline{abcd} \text{ chia hết cho } 9 \Rightarrow (\overline{x5})^2 : 9 \Rightarrow \overline{x5} : 3 \Rightarrow x+5 \in \{6; 9; 12\} \Rightarrow x \in \{1; 4; 7\}$$

Kiểm tra lại ta được hai số: 2015 và 5625.

b) Với $x; y; z > 0$ ta có:

$$+) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (1).$$

$$+) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (2)$$

$$+) x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} \geq 1 \quad (3)$$

Xảy ra đẳng thức ở (1), (2) và (3) $\Leftrightarrow x = y = z$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a+b+c)^2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \cdot \frac{a+b+c}{abc} \end{aligned}$$

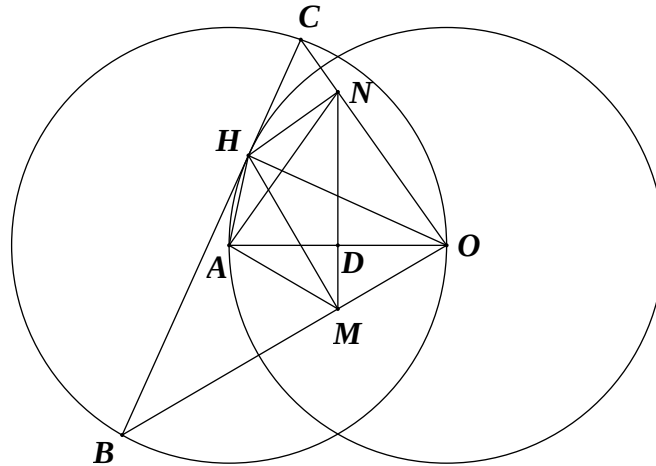
Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$M \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{9}{ab+bc+ca} + 2 \cdot 9$$

$$= \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) + 8 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + 18 \geq 2 + 8 + 18 = 28.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \\ ab=bc=ca \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Câu 4.



a) Ta có:

+ $\triangle OHB$ vuông tại H có HM là đường cao nên $OM \cdot OB = OH^2$

+ $\triangle OHC$ vuông tại H có HN là đường cao nên $ON \cdot OC = OH^2$

Suy ra $OM \cdot OB = ON \cdot OC$

$$\text{Mà } OA = OH = R \Rightarrow OA^2 = OM \cdot OB \Rightarrow \frac{OA}{OM} = \frac{OB}{OA}$$

+ Xét $\triangle OMA$ và $\triangle OAB$ có:

$\angle AOB$ chung

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{OA} \text{ (cmt)}$$

Suy ra $\triangle OMA, \triangle OAB$ đồng dạng theo trường hợp (c.g.c)

$\Rightarrow \angle MAO = \angle OBA$ mà $\angle AOB = \angle OBA$ (vì $OA = AB = R$) $\Rightarrow \angle MAO = \angle MOA \Rightarrow \triangle MOA$ cân tại $M \Rightarrow MA = MO$.

Chứng minh tương tự: $NA = NO$.

Từ đó suy ra MN là đường trung trực của $ON \Rightarrow MN \perp OA$.

b) Gọi giao điểm của MN và OA là D . Ta có $DA = DO$

$$\text{Ta có } OM \cdot OB = ON \cdot OC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{OC}{OB}$$

$\Rightarrow \triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow OMN = OCB \Rightarrow \triangle OMD \# \triangle OCH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{OD}{OH} = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2} OC$$

$$\text{Lại có } OM \cdot OB = OH^2 = R^2 \Rightarrow \frac{1}{2} OB \cdot OC = R^2 \Rightarrow OB \cdot OC = 2R^2$$

c) Ta có $\triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$

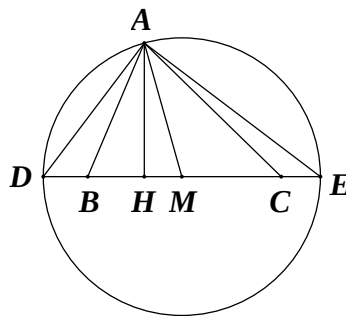
$$\Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \left(\frac{OD}{OH} \right)^2 = \frac{R^2}{4R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{OCB} = \frac{1}{8} OH \cdot BC$$

$$\leq \frac{1}{8} R(AB + AC) = \frac{1}{8} R(R + R) = \frac{R^2}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow A \equiv H$

Vậy diện tích lớn nhất của $\triangle OMN$ là $S_{OMN} = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow H \equiv A$.

Câu 5.



Gọi BC là cạnh lớn nhất của tam giác nhọn ABC có diện tích bằng 1.

Kẻ trung tuyến AM

Đặt $MA = R$

Vẽ $(O; R)$ cắt BC tại D, E

Các điểm B, C đối xứng với nhau qua M , chúng nằm trong đường tròn.

Ta sẽ chứng minh tam giác ADE là tam giác cần tìm. Nghĩa là cần chứng minh

$$S_{ADE} \leq \sqrt{3}.$$

Kẻ đường cao AH

Đặt $MB = MC = a$, ta có:

$$\begin{cases} S_{ADE} = \frac{1}{2} DE \cdot AH = R \cdot AH \\ AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{R}{a}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{R}{a} \leq \sqrt{3}$.

Ta thấy trong hai góc AMB, AMC có một góc lớn hơn hoặc bằng 90° .

Giả sử $AMC \geq 90^\circ$ khi đó ta có:

$$AM^2 + MC^2 \leq AC^2 \Rightarrow R^2 + a^2 \leq AC^2 \leq BC^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow R^2 \leq 3a^2 \Rightarrow \left(\frac{R}{a}\right)^2 \leq 3 \Rightarrow \frac{R}{a} \leq \sqrt{3} \text{ (đpcm)}$$

Đề số 15

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; y \geq 0, y \neq 1, x+y \neq 0$.

$$P = \frac{x(\sqrt{x}+1) - y(1-\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}.$$

$$b) \text{Đề } P=2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1+\sqrt{y}) - (\sqrt{y}+1) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{y}) = 1$$

$$\text{Ta có: } 1+\sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \{0;1;2;3;4\}$$

Thay vào phương trình trên $P=2$

$$\text{Ta được } (x;y) \in \{(4;0);(2;2)\}$$

Câu 2.

a) Điều kiện $x > 0$

$$\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{x^2+x+2} = x + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x^2+4}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{x^2+x+2} = x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+6} = \sqrt{x^2+x+2} + x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+x+2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+2x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (do } x^3+2x^2+4x+4 > 0)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$

b) Ta có:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) + (y^2 + 3y - 4) = 0$$

$$(x+y)^2 + (y-1)(y+4) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+4) = -(x+y)^2 \quad (*)$$

$$\text{Do } -(x+y)^2 \leq 0 \quad \forall x, y \text{ nên}$$

$$(y-1)(y+4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 1 \Rightarrow y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$$

Theo các giá trị nguyên của y ta tính được các giá trị nguyên của x .

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y)$ là:

$$(4; -4); (2; 0); (1; -3); (5; -3); (-2; 0); (-1; 1)$$

Câu 3.

a) Ta có: $45 = 5.9$ mà $(5; 9) = 1 \Rightarrow \overline{a56b}:45 \Leftrightarrow \overline{a56b}:5$ và 9 .

* Xét $\overline{a56b}:5 \Leftrightarrow b \in \{0; 5\}$

- Nếu $b = 0$ ta có $\overline{a560}:9 \Leftrightarrow a+11:9 \Rightarrow a = 7$

- Nếu $b = 5$ ta có $\overline{a560}:9 \Leftrightarrow a+16:9 \Rightarrow a = 2$

Vậy ta tìm được hai số 7560 và 2565 thỏa mãn.

b) Đặt $x = a^3; y = b^3; z = c^3$

Ta có $x; y; z > 0$ và $xyz = 1 \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc = 1$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab \text{ (do } a+b > 0; a^2 - ab + b^2 \geq ab \text{)}$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq (a+b)ab + abc = ab(a+b+c) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}$$

Cộng theo vế của các bất đẳng thức ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} &= \frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \\ &\leq \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{a+b+c} \cdot (a+b+c) = 1. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Câu 4.

Áp dụng định lý Pitago ta có:

Như vậy AD, BD là hai đường chéo cần tìm.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$A = \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

2) Vì $ab+bc+ca = 6$ nên $a^2 + 6 = a^2 + ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$; tương tự ta có :

$$b^2 + 6 = (b+c)(b+a) ; c^2 + 6 = (c+a)(c+b)$$

Thay vào biểu thức P ta có :

$$P = \sqrt{\frac{(a+b)^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)^2(c+a)}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)^2}{(b+c)(b+a)}}$$

$$P = 2(a+b+c) \text{ (vì } a, b, c > 0)$$

$$\text{Mặt khác : } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca) = 21 - 2 \cdot 6 = 9$$

$$\Rightarrow a+b+c = 3 \Rightarrow P = 6$$

Câu 2.

$$1) x^2 + 2015x - 2014 = 2\sqrt{2017x - 2016}$$

$$\text{Điều kiện } x \geq \frac{2016}{2017}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 2x + 1 + 2017x - 2016 - 2\sqrt{2017x - 2016} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2017x-2016}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{2017x-2016}-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2017x-2016=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Để đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn tâm O (O là gốc tọa độ Oxy) bán kính 2cm khi khoảng cách từ O tới đường thẳng (d) là 2cm

* Nếu $m=1$ ta có : $y = -1$ là đường thẳng song song với trục Ox cắt trục tung tại điểm có tung độ là -1. Khoảng cách từ (d) tới O là $1 \neq 2 \Rightarrow m=1$ (loại)

* Nếu $m=1,5$ ta có : $y = 0,5x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, khoảng cách từ O tới (d) là $0 \neq 2 \Rightarrow m=1,5$ (loại)

* Nếu $m \neq 1, m \neq 1,5$:

+ Cho $x=0 \Rightarrow y=2m-3$ ta có $A(0, 2m-3) \Rightarrow OA = |2m-3|$

+ Cho $y=0 \Rightarrow x = \frac{-(2m-3)}{m-1}$ ta có $B\left(\frac{-(2m-3)}{m-1}; 0\right) \Rightarrow OB = \frac{|2m-3|}{|m-1|}$

Đồ thị hàm số là đường thẳng AB và tạo với 2 trục tọa độ tam giác AOB vuông tại O.

Kẻ $OH \perp AB$ ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ để $OH=2$ thì:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{(2m-3)^2} + \frac{(m-1)^2}{(2m-3)^2} \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 4 + 4m^2 - 8m + 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4} \text{ (tm)}$$

Vậy $m = \frac{5}{4}$ thỏa mãn đk đề bài.

Câu 3.

1) Ta có : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$

$$= (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) + (24n - 24) = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) + 24(n-1)$$

$$= n[(n^3 + n^2) + (5n^2 + 5n) + (6n + 6)] + 24(n-1) = n(n+1)(n^2 + 5n + 6) + 24(n-1)$$

$$= n(n+1)(n+2)(n+3) + 24(n-1)$$

Vì $n; n+1; n+2; n+3$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 2 số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết $2.3.4 = 24$ và $24(n-1)$ chia hết cho 24 nên $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

2) Thay $x = 1 + \sqrt{2}$ vào phương trình ta có : $(1 + \sqrt{2})^3 + a(1 + \sqrt{2})^2 + b(1 + \sqrt{2}) + 2 = 0$

$$\Rightarrow 9 + 5\sqrt{2} + 3a + 2a\sqrt{2} + b + b\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow (5+2a+b)\sqrt{2} = -(3a+b+9)$$

Nếu $5+2a+b \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{-(3a+b+9)}{5+2a+b} \in Q$ (vô lí)

$$\text{Vậy } \begin{cases} 5+2a+b=0 \\ 3a+b+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-5 \\ 3a+b=-9 \end{cases} \Rightarrow a=-4; b=13$$

Câu 4.

a) * Tam giác ABH vuông tại H, đường cao HE nên : $AH^2 = AE \cdot AB$

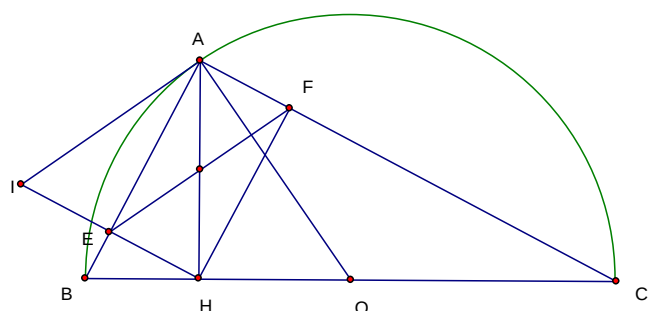
Tam giác ACH vuông tại H, đường cao HF nên : $AH^2 = AF \cdot AC$

$$\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$$

* Tam giác ABC nội tiếp (O)

đường kính BC $\Rightarrow \triangle ABC$ vuông

tại A, có AH là đường cao



$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH^4 = BH^2 \cdot CH^2$$

$$\text{Mặt khác: } BH^2 = BE \cdot BA ; CH^2 = CF \cdot CA \Rightarrow AH^4 = BE \cdot CF \cdot BA \cdot CA$$

$$\text{Ta lại có } AB \cdot AC = AH \cdot BC \Rightarrow AH^3 = BE \cdot CF \cdot BC$$

$$\text{Ta có : Tứ giác AEHF là hình chữ nhật} \Rightarrow AH = EF \Rightarrow EF^3 = BE \cdot CF \cdot BC$$

$$\text{b) - Vì H đi qua I qua AB} \Rightarrow IAB = HAB$$

$$\text{- Tam giác OAB cân tại O} \Rightarrow OAB = OBA$$

$$\text{Ta có } OAB + IAB = OBA + HAB = 90^\circ \Rightarrow IAO = 90^\circ \Rightarrow IA \text{ là tiếp tuyến với (O) tại A}$$

$$\text{c) Đặt } BH = x (0 \leq x \leq 2R) \Rightarrow HC = 2R - x$$

$$\text{Tính được } AH = \sqrt{x(2R-x)}$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{x(2R-x)} = \frac{1}{2} \sqrt{x^3(2R-x)}$$

Biến đổi :

$$x^3(2R-x) = x^2(2Rx-x^2) = \frac{x^2(6Rx-3x^2)}{3} \leq \frac{(x^2+6Rx-3x^2)^2}{12} = \frac{(6Rx-2x^2)^2}{12} = \frac{(3Rx-x^2)^2}{3}$$

$$\text{Mặt khác : } 3Rx-x^2 = \frac{9R^2}{4} - (x-\frac{3R}{2})^2 \leq \frac{9R^2}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AHB} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{81R^4}{16 \cdot 3}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8} \Rightarrow S_{\triangle AHB(\max)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle AHB(\max)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8} \text{ khi A là giao điểm của đường trung trực đoạn OB và (O)}$$

Câu 5.

$$\text{Chứng minh BĐT phụ: Với mọi } x, y > 0 \text{ ta có : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } x=y$$

Áp dụng BĐT phụ trên ta có :

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{2ab} = \frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \geq \frac{4}{a^2+b^2+1+6ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{4}{(a+b)^2+1+4ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\text{Vì } a, b > 0, \text{ theo BĐT Cossi ta có } a+b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ mà } a+b \leq 1 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{4}{1^2+1+4 \cdot \frac{1}{4}} + \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } a=b=\frac{1}{2}$$

Đề số 17

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Ta có: $x = 9 - 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{2}-1$. Khi đó

$$M = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{9-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1+1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{9-2\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(9+2\sqrt{2})}{81-8} = \frac{16\sqrt{2}-1}{73}$$

$$\text{c) Xét } M - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$$

Vì $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow 3(x+\sqrt{x}+1) > 0; -(\sqrt{x}-1)^2 < 0$. Suy ra $M - \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow M < \frac{1}{3}$.

Câu 2.

a) Ta có $3 \neq -1$ để đường thẳng (d) song song đường thẳng $y = 2x - 1$ thì $m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4$.

b) Điều kiện để (d) đi qua điểm cố định $N(x_0, y_0)$ với mọi giá trị của m là:

$$(m-2)x_0 - y_0 + 3 = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow mx_0 - (2x_0 + y_0 - 3) = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}. \text{ Vậy (d) đi qua điểm cố định } N(0; 3) \quad \forall m.$$

c) Gọi A và B là giao điểm (d) với Ox; Oy.

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow OA = 3$$

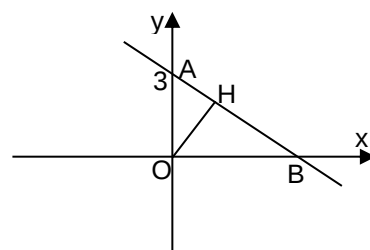
$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{m-2} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow OB = \left| \frac{3}{2-m} \right|$$

Gọi OH là khoảng cách từ O đến (d).

$$\text{Ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{9} + \frac{(2-m)^2}{9} = \frac{m^2 - 4m + 5}{9}$$

$$\text{Mà } OH = 1 \Rightarrow m^2 - 4m + 5 = 9 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 8 \Rightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy với $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ thì khoảng cách từ O đến (d) bằng 1.



Câu 3.

a) ĐK: $x \neq -1; x \neq 2$

$$\text{Ta có: } \frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 3(x+1) = 3 + x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (tm)}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = \frac{1}{2}.$$

b) $\sqrt{x^2 - 1} = x + 1 + \sqrt{x + 1}$. Điều kiện căn thức có nghĩa

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

* Thay $x = -1$ thỏa mãn phương trình.

* Với $x \geq 1$. Khi đó phương trình có dạng $\sqrt{(x-1)(x+1)} - \sqrt{x+1} = x+1$

Vì $x \geq 1$ nên $\sqrt{x+1} > 0$, chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$

Ta có: $\sqrt{x-1} - 1 = \sqrt{x+1}$. Vì với $x \geq 1$ thì $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$

Nên $\sqrt{x-1} - 1 < \sqrt{x+1} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$.

Câu 4.

Ta có: $x^2y + xy - x = 4 \Leftrightarrow xy(x+1) - (x+1) = 3 \Leftrightarrow (xy-1)(x+1) = 3$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} x+1=1 \\ xy-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -1=3 \text{ (vô lí)} \end{cases} \quad + \text{ TH3: } \begin{cases} x+1=3 \\ xy-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} x+1=-1 \\ xy-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (tm)} \quad + \text{ TH4: } \begin{cases} x+1=-3 \\ xy-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(-2; 1); (2; 1); (-2; 0)\}$.

Câu 5.

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$A_1 = A_2; A_3 = A_4 \Rightarrow \widehat{MAN} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2(A_2 + A_3) = 2.90^\circ = 180^\circ$$

Suy ra ba điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Ta có:

$$MB \perp MN; CN \perp MN \Rightarrow MB \parallel CN \Rightarrow BMNC$$

hình thang có đường cao MN.

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$BM = BH = 2\text{cm}; CN = CH = 4,5\text{cm}.$$

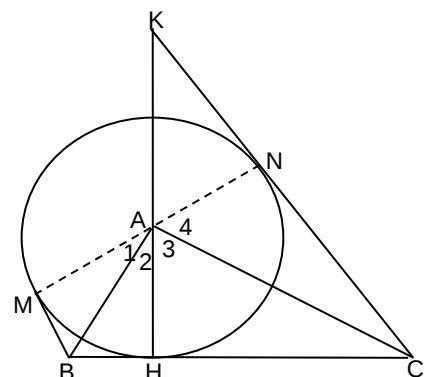
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$ABC \text{ đường cao } AH = \sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{2 \cdot 4,5} = 3 \text{ (cm)}.$$

$$\Rightarrow MN = 2 \cdot AH = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (cm)}.$$

$$S_{BMNC} = \frac{(MB + CN) \cdot MN}{2} = \frac{(2 + 4,5) \cdot 6}{2} = 19,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

c) Đặt $AK = x; KN = y$.



$$\text{Ta có } \Delta KNA \sim \Delta KHC(g.g) \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{KN}{KH} = \frac{AN}{CH} \Rightarrow \frac{x}{y+4,5} = \frac{y}{x+3} = \frac{2}{3}$$

$$3x = 2y + 9 \quad (1); 3y = 2x + 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = 7,8; y = 7,2$.

Vậy $AK = 7,8 \text{ (cm)}; KN = 7,2 \text{ (cm)}$.

Câu 6.

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz) + (x^2 - 2xy + y^2) + (4x^2 - 4xz + z^2) + (4y^2 - 4yz + z^2) = 18$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2z)^2 + (x-y)^2 + (2x-z)^2 + (2y-z)^2 = 18$$

$$\text{Vì } (x-y)^2 \geq 0; (2x-z)^2 \geq 0; (2y-z)^2 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } (x+y+2z)^2 \leq 18 \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \leq x+y+2z \leq 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy Min } P = -3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2y-z=0 \\ x+y+2z=-3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{-\sqrt{2}}{2}; z=-\sqrt{2}$$

$$\text{Max } P = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2y-z=0 \\ x+y+2z=3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}; z=\sqrt{2}$$

Đề số 18

Câu 1.

$$1) \text{ Ta có } x-y = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5} = 3$$

$$\text{Nên: } A = x^3 + x^2 - y^3 + y^2 + xy - 3x^2y + 3xy^2 - 3xy + 1974$$

$$= (x-y)^3 + (x-y)^2 + 1974$$

$$= 3^3 + 3^2 + 1974$$

$$= 2010$$

$$2) \text{ Ta có } \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{b-c}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{a-b}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} \quad (2)$$

$$\text{Mà } b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow a-b = b-c \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\text{hay } \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Câu 2.

1) ĐK : $a+b \neq 0, a+c \neq 0, b+c \neq 0$

Biến đổi phương trình ta được :

$$x \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} + (a+b+c)$$

Biến đổi vế phải :

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} + (a+b+c) = \\ & \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} + \left[\frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{b(a+c)}{a+c} + \frac{c(a+b)}{a+b} \right] \\ & = \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} + \left(\frac{ab+ac}{b+c} + \frac{ba+bc}{a+c} + \frac{ca+cb}{a+b} \right) \\ & = \frac{ab+bc+ca}{a+b} + \frac{ac+ab+bc}{a+c} + \frac{bc+ab+ca}{b+c} \\ & = (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } x \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) = (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = ab+bc+ca$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = ab+bc+ca$

2) Từ hệ phương trình đã cho ta có:

$$x+y \neq 0; x+2y \neq 0, x+3y \neq 0, y+2x \neq 0, y+3x \neq 0$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{60}{(x+2y)(x+3y)} = \frac{105}{(y+2x)(y+3x)}$$

$$\text{Hay } \frac{60}{x^2+5xy+6y^2} = \frac{105}{y^2+5xy+6x^2} \Leftrightarrow 60y^2 + 300xy + 360x^2 = 105y^2 + 525y + 630y^2$$

$$\text{Rút gọn phương trình ta được: } 525x^2 - 225xy - 570y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 17x^2 - 15xy - 38y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(17x+19y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x=\frac{-19}{17}y \end{cases}$$

- Với $x=2y$ thay vào một trong hai phương trình của hệ ban đầu ta được $x=2; y=1$

$$\text{- Với } x=\frac{-19}{17}y \text{ ta được } x=\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}; y=\frac{17\sqrt[3]{4}}{4}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: } (2;1); \left(\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}; \frac{17\sqrt[3]{4}}{4} \right)$$

Câu 3.

1) Ta có:

$$(a - \sqrt{2011})(b + \sqrt{2011}) = 14$$

$$\Leftrightarrow ab + a\sqrt{2011} - b\sqrt{2011} - 2011 = 14$$

$$\Leftrightarrow (a - b)\sqrt{2011} = 2025 - ab$$

- Nếu $a \neq b$ thì VP là số vô tỉ, VT là số nguyên $\Rightarrow$ Vô lí

- Nếu $a = b$ thì $ab - 2025 = 0 \Rightarrow a = b = \pm 45$. Vậy $a = b = \pm 45$

2) Ta có :

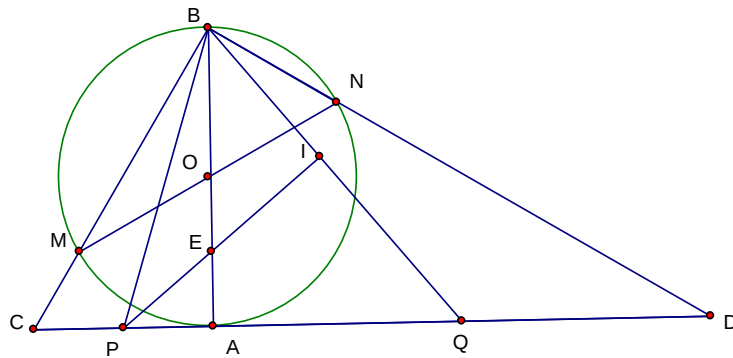
$$N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15 = (k^4 - k^2) + (2k^3 - 2k) - (15k^2 - 15)$$

$$= (k^2 - 1)(k^2 + 2k - 15) = (k - 1)(k + 1)(k - 3)(k + 5)$$

Ta thấy rằng với k là số nguyên lẻ thì N là tích của 4 thừa số (nhân tử) chẵn. Do đó N chắc chắn chia hết cho 16

Vậy k phải là số nguyên lẻ

Câu 4.



1) Ta có : $CDB = CBA$ (cùng phụ với C)

$\Rightarrow CBO = MBA = BMO$ (Vì $\triangle OBM$ cân tại O)

$$CDB = BMO$$

$$\text{Mà } BMO + CMN = 180^\circ$$

$$\Rightarrow CDN + CMN = 180^\circ \Rightarrow MNDC \text{ nội tiếp}$$

2) Xét $\triangle PAE$ và $\triangle BAQ$ có $PAE = BAQ = 90^\circ$ (GT) (*)

ta có $APE + PEA = ABQ + BEI = 90^\circ$ mà $PEA = BEI$ (đối đỉnh)

Nên $APE = ABQ$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle PAE \sim \triangle BAQ$

$$\Rightarrow \frac{AP}{BA} = \frac{EA}{AQ} \Rightarrow AP \cdot AQ = BA \cdot EA \Rightarrow EA = \frac{AP \cdot AQ}{BA} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} AD}{AB}$$

$$\left(\text{do } AP = \frac{1}{2}AC, AQ = \frac{1}{2}AD \right) \Rightarrow EA = \frac{\frac{1}{4}AC \cdot AD}{AB}$$

Mà $AC \cdot AD = AB^2 = 4R^2$ (hệ thức trong tam giác vuông CBD)

$$\Rightarrow EA = \frac{\frac{1}{4} \cdot 4R^2}{2R} = \frac{R}{2}. \text{ Vậy E là trung điểm của OA}$$

$$3) \text{ Ta có : } S_{BPQ} = \frac{1}{2} AB \cdot PQ$$

Do AB không đổi, nên S_{BPQ} nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất (Vì $CD = 2 \cdot PQ$).

Ta có $CD = AC + AD$ mà $AC \cdot AD = 4R^2$ không đổi.

Nên $AC + AD$ nhỏ nhất khi $AC = AD = 2R$

$$\text{Lúc đó : } PQ = \frac{AC + AD}{2} = 2R$$

$$\text{Vậy } S_{BPQ} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } \frac{1}{2} AB \cdot PQ_{(\min)} = 2R^2$$

Câu 5.

Với mọi số x sao cho : $-1 < x < 1$ thì ta luôn có $x^2 < 1$ và $x^2 < |x|$

Từ $a + b + c = 0$ thì 3 số không thể cùng dấu. Do đó chỉ xảy ra 3 trường hợp sau :

$$1) \text{ Nếu } b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + c^2 < 1 + 1 = 2$$

$$2) \text{ Nếu } -1 < a < 0, b \leq c \leq 1 \text{ thì } 0 < -a < 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq -a + b + c = -2a < 2$$

$$3) \text{ Nếu } -1 < a \leq b < 0 < c < 1 \text{ thì } 0 < -a < 1, 0 < -b < 1$$

$$\text{và } 0 < c = (a + b) < 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq (-a) + (-b) + c = -(a + b) + c = c + c < 1 + 1 = 2$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 < 2$$

Đề số 19

Câu 1.

$$a) \text{ ĐKXĐ: } x \geq 0, x \neq 1$$

- Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\
&= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - x + 1 - x + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}
\end{aligned}$$

b) - Ta có: $P < 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \quad (\text{do } \sqrt{x} + 1 > 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < 1$$

$$\Rightarrow x < 1$$

- Kết hợp với ĐKXĐ ta được: Với $0 \leq x < 1$ thì $P < 0$.

Câu 2.

a) ĐKXĐ $x \geq -5$.

$$\text{- Ta có: } x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0$$

$$\text{- Vì } (x-4)^2 \geq 0; (\sqrt{x+5} - 3)^2 \geq 0 \text{ nên}$$

$$\begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 0 \\ \sqrt{x+5} - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

(thỏa mãn ĐKXĐ)

- Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4$

b) Ta có: $(a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

- Vì $a, b > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức cosi cho hai số dương

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

$$\text{- Do đó } (a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

Câu 3.

a) Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương

- Để A là số chính phương thì $A = n^2 + n + 6 = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$)

- Ta có: $n^2 + n + 6 = a^2$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 24 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2a)^2 - (2n+1)^2 = 23$$

$$\Leftrightarrow (2a+2n+1) \cdot (2a-2n-1) = 23$$

- Vì a, n là các số tự nhiên nên $(2a+2n+1)$ là số tự nhiên và

$2a+2n+1 > 2a-2n-1$. Do đó

$$\begin{cases} 2a+2n+1 = 23 \\ 2a-2n-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 24 \\ 4n = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ n = 5 \end{cases}$$

- Vậy $n = 5$

b) - Xét phép chia của xy cho 3

Nếu xy không chia hết cho 3 thì

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ y \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ y^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \quad (\text{Vô lí})$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy xy chia hết cho 3 (1)

- Xét phép chia của xy cho 4

Nếu xy không chia hết cho 4 thì

$$\text{TH1: } \begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{4} \\ y \equiv \pm 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ y^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4} \quad (\text{vô lí})$$

TH2: Trong hai số x, y một số chia 4 dư 2, một số chia 4 dư 1 hoặc -1. Không mất tính tổng quát giả sử

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 (\text{mod } 4) \\ y \equiv 2 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

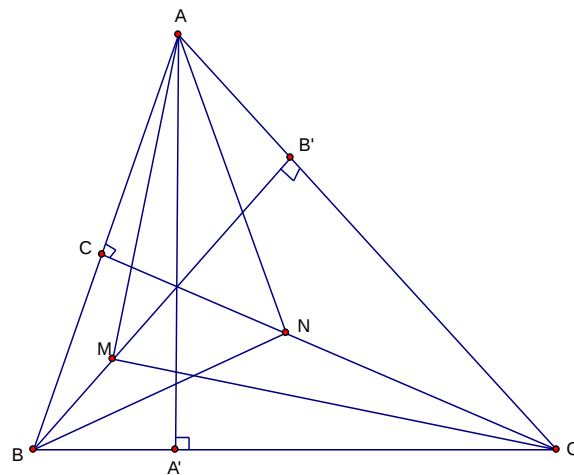
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 (\text{mod } 8) \\ y^2 \equiv 4 (\text{mod } 8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 (\text{mod } 8) \text{ (vô lí)}$$

- Vậy xy chia hết cho 4 (2)

- Từ (1) và (2): Vậy xy chia hết cho 12

Câu 4.



a) Chứng minh $\Delta AC'C \sim \Delta AB'B$

- Xét $\Delta AC'C; \Delta AB'B$ có

Góc A chung

$$B' = C' = 90^\circ$$

Suy ra: $\Delta AC'C \sim \Delta AB'B$

b) Chứng minh $AM = AN$.

- Xét ΔAMC vuông tại M đường cao MB'

$$AM^2 = AB' \cdot AC$$

- Xét ΔANB vuông tại N đường cao NC'

$$AN^2 = AC' \cdot AB$$

- Theo câu a ta có $AB' \cdot AC = AC' \cdot AB$

- Do đó: $AM = AN$

c) Chứng minh $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{S'}{S}$

$$\text{- Chỉ ra được } \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB'}{AB} \right)^2 = \cos^2 A$$

$$\text{- Tương tự } \frac{S_{BA'C'}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$$

$$\frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$$

- Do đó:

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{S_{AB'C'} + S_{BA'C'} + S_{CA'B'}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{S_{ABC} - S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S'}{S} \end{aligned}$$

Câu 5.

- Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 3x + 4y + \frac{2}{5x} + \frac{8}{7y} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2} + \frac{8}{7y} + \frac{7y}{2} \end{aligned}$$

- Áp dụng bất đẳng thức cosi cho hai số dương ta được

$$\frac{2}{5x} + \frac{5x}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2 \cdot 5x}{5x \cdot 2}} = 2$$

$$\frac{8}{7x} + \frac{7x}{2} \geq 2\sqrt{\frac{8 \cdot 7x}{7x \cdot 2}} = 4$$

$$\text{- Vì } x + y \geq \frac{34}{35} \text{ nên } A \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{35} + 2 + 4 = 6\frac{17}{35}$$

$$\text{- Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{2}{5x} = \frac{5x}{2} \\ \frac{8}{7y} = \frac{7y}{2} \\ x + y = \frac{34}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\text{- A đạt giá trị nhỏ nhất là } 6\frac{17}{35} \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Đề số 20

Câu 1.

$$\text{a) } P = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{2}{1-4x} \right) \cdot \frac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{9x-6\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{2\sqrt{x}+1-2}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{3\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}+1} \cdot (3\sqrt{x}-1) \\
&= \frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{9}$

Xét $2P = \frac{6\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = \frac{3(2\sqrt{x}+1)-5}{2\sqrt{x}+1} = 3 - \frac{5}{2\sqrt{x}+1}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì:

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2P = 3 - \frac{5}{2\sqrt{x}+1} \text{ là số nguyên chẵn}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}+1} \text{ là số nguyên lẻ}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1 \in \{1; 5\}$$

$$1) 2\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

$$2) 2\sqrt{x}+1=5 \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $x \in \{0; 4\}$ là các giá trị cần tìm.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
x^3 &= \left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} \right)^3 \\
\Leftrightarrow x^3 &= 10 + 3\sqrt[3]{-27} \left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} \right) \\
\Leftrightarrow x^3 &= 10 - 9x \\
\Leftrightarrow x^3 + 9x - 10 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+10) &= 0 \\
\Leftrightarrow x=1 &\text{ vì } x^2+x+10 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0, \text{ với mọi giá trị của } x.
\end{aligned}$$

Thay $x=1$ vào biểu thức A ta được:

$$A = 1^{2015} - 1^{2016} + 2017 = 2017.$$

Câu 2.

$$a) x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}.$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 1} = t$, với $t > 0$, ta có $t^2 + 3x = (x + 3).t$

Từ đó giải được $t = x$; $t = 3$

Do đó:

$$+ \text{ Với } t = x, \text{ ta có } \sqrt{x^2 + 1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Với } t = 3, \text{ ta có } \sqrt{x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \pm 2\sqrt{2}$.

$$b) \text{ Ta có: } 5x - 3y = 2xy - 11$$

$$\Leftrightarrow 2xy + 3y = 5x + 11$$

$$\Leftrightarrow y(2x + 3) = 5x + 11$$

Để thấy $2x + 3 \neq 0$ (vì x nguyên) do đó

$$y = \frac{5x + 11}{2x + 3}$$

Để $y \in \mathbb{Z}$ ta phải có $5x + 11 : 2x + 3$

$$\Rightarrow 2(5x + 11) : 2x + 3$$

$$\Rightarrow 10x + 22 : 2x + 3$$

$$\Rightarrow 5(2x + 3) + 7 : 2x + 3$$

$$\Rightarrow 7 : 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x + 3 \text{ là ước của } 7$$

Ta có

$2x + 3$	1	-1	7	- 7
x	- 1	-2	2	- 5
y	6	-1	3	2

Vậy cặp số $(x; y)$ nguyên cần tìm là $(-1; 6); (-2; -1); (2; 3); (-5; 2)$

Câu 3.

a) Ta có n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên n có dạng $n = 2k$ hoặc

$n = 2k + 1$, với k là số tự nhiên lớn hơn 0.

+ Với $n = 2k$, ta có:

$$n^4 + 4^n = (2k)^4 + 4^{2k} \text{ lớn hơn } 2 \text{ và chia hết cho } 2.$$

Do đó $n^4 + 4^n$ là hợp số.

+ Với $n = 2k + 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k} \cdot 4 = n^4 + (2 \cdot 4^k)^2 \\
 &= n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot 4^k + (2 \cdot 4^k)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot 4^k \\
 &= (n^2 + 2 \cdot 4^k)^2 - (2 \cdot n \cdot 2^k)^2 \\
 &= (n^2 + 2 \cdot 4^k - 2 \cdot n \cdot 2^k)(n^2 + 2 \cdot 4^k + 2 \cdot n \cdot 2^k) \\
 &= ((n - 2^k)^2 + 4^k)((n + 2^k)^2 + 4^k)
 \end{aligned}$$

Mỗi thừa số đều lớn hơn hoặc bằng 2. Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số.

Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

b) Ta có: $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$$\frac{y}{y+1} = 1 - \frac{1}{y+1}$$

$$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}$$

$$\Rightarrow P = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) = 3 - Q.$$

Theo BDT Côsi, nếu $a, b, c > 0$ thì

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

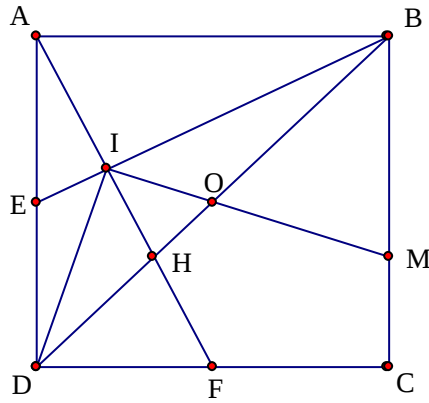
$$\text{Suy ra } Q = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow -Q \leq -\frac{9}{4} \text{ nên } P = 3 - Q \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy GTLN của } P = \frac{3}{4} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Câu 4.



a) Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle DAF$

$$\Rightarrow \angle ABE = \angle DAF$$

$$\text{Mà } \angle DAF + \angle BAF = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABE + \angle BAF = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AIB = 90^\circ$$

Xét tam giác ABE vuông tại A, theo định lý Pytago có:

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ (cm)}$$

Lại có $AI \perp BE$, do đó:

$$AI \cdot BE = AB \cdot AE \Rightarrow AI = \frac{AB \cdot AE}{BE} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

$$BI \cdot BE = AB^2 \Rightarrow BI = \frac{AB^2}{BE} = \frac{2^2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

b) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle BIM$ có

$$\angle ABH = \angle BIM = 45^\circ$$

$$\angle BAH = \angle IBM \text{ (cùng phụ với } \angle ABI \text{)}$$

Suy ra $\triangle ABH \sim \triangle BIM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BI} = \frac{AH}{BM} = \frac{BH}{IM} \quad (1)$$

Ta có $\triangle HAB \sim \triangle HFD$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HD} = \frac{AB}{DF} = \frac{HA}{HF} = 2$$

$$\Rightarrow BH = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (cm); } AH = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow BM = \frac{AH \cdot BI}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{4}{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có } \frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \triangle BMH \sim \triangle BCD \text{ (c.g.c)}$$

Do đó $\angle BMH = \angle BCD$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$$\Rightarrow MH \parallel CD$$

Mà $BC \perp CD$

$$\Rightarrow MH \perp BC$$

Ta có $\triangle BIH$ và $\triangle BMH$ là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền BH, do đó 4 điểm B, I, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính BH.

c) Ta có $\angle BIM = \angle MIF = 45^\circ$, do đó IM là phân giác của $\angle BIF$

$$\text{Ta lại có } AF = BE = \sqrt{5} \text{ (cm)} \Rightarrow IF = AF - AI = \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

$$\text{Suy ra } \frac{IF}{BA} = \frac{DF}{AH} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Suy ra } \triangle IDF \sim \triangle BAH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle DIF = \angle ABH = 45^\circ$$

Do đó ID là phân giác của $\angle EIF$

Xét tam giác BIH có IO và ID là phân giác trong và ngoài

$$\Rightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{DH}{DB} = \frac{IH}{IB}$$

$$\text{Suy ra } DH \cdot BO = OH \cdot BD.$$

Câu 5.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Vì $a + b + c = 1$ nên

$$P = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1$$

Từ bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương ta có:

$$\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{27}$$

$$\text{Đặt } x = abc, \text{ thì } 0 < x \leq \frac{1}{27}$$

$$\text{Do đó } x + \frac{1}{x} - 27 - \frac{1}{27} = \frac{(27-x)(1-27x)}{27x} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } x + \frac{1}{x} = abc + \frac{1}{abc} \geq 27 + \frac{1}{27} = \frac{730}{27}$$

$$\text{Mặt khác } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

$$\text{Nên } P \geq \frac{730}{27} + 10 = \frac{1000}{27} = \left(\frac{10}{3}\right)^3$$

Vậy $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$; dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Đề số 21

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right), \\ &= \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2 (a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a} \end{aligned}$$

Vậy $A = 1 + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$

Khi $a = 2016 - 2\sqrt{2015} = (\sqrt{2015} - 1)^2$ thỏa mãn ĐK.

Ta có $A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2015} - 1)^2} = \sqrt{2015}$

$$\text{b) Đặt } A = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{56}{54}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{56}{54}}}$$

$$\Rightarrow A^3 = 1 + \sqrt{\frac{56}{54}} + 1 - \sqrt{\frac{56}{54}} + 3\sqrt[3]{1 - \frac{56}{54}} \cdot A = 2 + 3\sqrt[3]{-\frac{2}{54}} \cdot A$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 2 - A \Leftrightarrow A^3 + A - 2 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 2) = 0$$

Vì $A^2 + A + 2 > 0$ với mọi A .

Nên ta có $A - 1 = 0 \Leftrightarrow A = 1$ là một số nguyên.

Vậy $\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{56}{54}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{56}{54}}}$ là một số nguyên.

Câu 2.

$$\text{a) } \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4. \text{ ĐK: } x \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4} - 2| = 4 \quad (*)$$

+ Nếu $\sqrt{x-4} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$ thì $(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow x = 8$ (t/m)

+ Nếu $\sqrt{x-4} - 2 < 0 \Leftrightarrow 4 \leq x < 8$

$$\text{thì } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $4 \leq x \leq 8$

$$\text{b) } (x^2 + 2x)^2 - 2x^2 - 4x = 3 \Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0 \quad (1)$$

Đặt $x^2 + 2x = a$, phương trình (1) trở thành

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = 3$$

$$+ \text{ Với } a = -1, \text{ ta có } x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$+ \text{ Với } a = 3, \text{ ta có } x^2 + 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-1; 1; -3\}$

Câu 3.

$$\text{a) Gọi } M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98} \Rightarrow S = 2 + M$$

$$M = 2M - M = (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98} + 2^{99}) - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98})$$

$$M = 2^{99} - 2$$

$$\Rightarrow S = 2^{99} = (2^4)^{24} \cdot 2^3 = 8 \cdot 16^{24}$$

Vì 16^{24} có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow S$ có chữ số tận cùng là 8

Nên S không là số chính phương.

$$\text{b) } 2x^2 + y^2 + 4x = 4 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (x-y)^2 = 8(1) \Rightarrow (x+2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow |x+2| \leq \sqrt{8}$$

Vì x, y nguyên nên ta có bảng giá trị sau:

$x+2$	-2	-1	0	1	2
x	-4	-3	-2	-1	0

Thay vào (1) ta được:

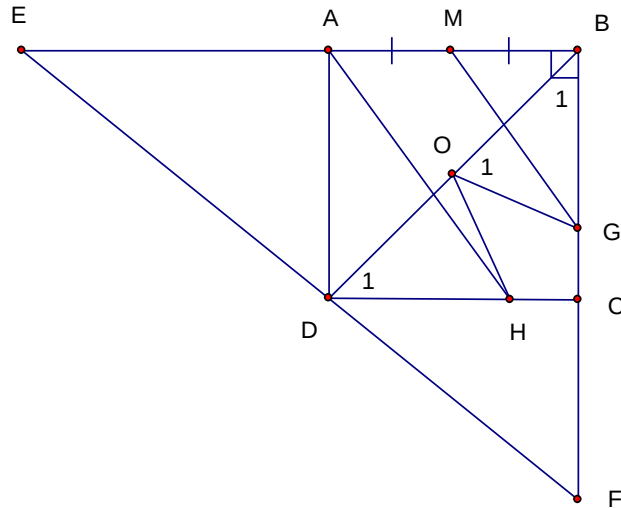
$(x-y)^2$	4	7	8	7	4
x		Loại	Loại	Loại	

Với $x = -4$ và $(x-y)^2 = 4$ ta được $y = -2$ hoặc $y = -6$ (thỏa mãn)

Với $x = 0$ và $(x-y)^2 = 4$ ta được $y = 2$ hoặc $y = -2$ (thỏa mãn)

Vậy $(x; y) = (-4; -2); (-4; -6); (0; 2); (0; -2)$

Câu 4.



a) Ta có $B_1 = D_1 = 45^\circ$

$$BGO + O_1 = 135^\circ; DOH + O_1 = 135^\circ$$

$$\Rightarrow BGO = DOH$$

$$\Rightarrow \triangle BGO \sim \triangle DOH \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{OB}{HD} = \frac{BG}{OD} \Rightarrow HD.BG = OB.OD \quad (1)$$

b) Ta có $\triangle MBO \sim \triangle OBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OB}{AB} = \frac{MB}{OB} \text{ mà } OB = OD, AB = AD$$

$$\Rightarrow OB.OD = MB.AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $HD.BG = MB.AD$

$$\Rightarrow \frac{HD}{MB} = \frac{AD}{BG} \text{ mà } \angle ADH = \angle MBG = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle DHA \sim \triangle BMG \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DHA = BMG$$

Mà $DHA = HAB$ (2 góc so le trong, $AB \parallel DC$)

$$\Rightarrow HAB = GMB, \text{ mà hai góc này ở vị trí đồng vị.}$$

$$\Rightarrow MG \parallel AH.$$

c) Ta có $S_{BEF} = S_{BDE} + S_{BDF}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} BE.BF = \frac{1}{2} AD.BE + \frac{1}{2} DC.BF$$

$$\Rightarrow BE.BF = AD.BE + DC.BF$$

Chia cả hai vế cho $BE.BF.AD$ ($AD = DC$)

Ta có $\frac{1}{AD} = \frac{1}{BF} + \frac{1}{BE}$

Lại có $BD = AD\sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{BD}{\sqrt{2}}$

Suy ra $\frac{\sqrt{2}}{BD} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BF}$

Câu 5.

Theo bất Cô si $\sqrt{\frac{2}{3}(x+y)} \leq \frac{\frac{2}{3}+x+y}{2} = \frac{2+3x+3y}{6}$

$$\sqrt{\frac{2}{3}(y+z)} \leq \frac{\frac{2}{3}+y+z}{2} = \frac{2+3y+3z}{6};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}(z+x)} \leq \frac{\frac{2}{3}+z+x}{2} = \frac{2+3z+3x}{6}$$

Cộng theo vế lại ta có: $\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}) \leq 2$

Suy ra: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x+y = y+z = z+x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x=y=z = \frac{1}{3}$

Đề số 22

Câu 1.

$$\begin{aligned} a) P &= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a > b > 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \frac{(a-b) \cdot (\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) + (a-b) \cdot (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \frac{2(a-b) \cdot \sqrt{a+b}}{2b\sqrt{a-b}} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b}} = \frac{a^2+b^2}{b} \end{aligned}$$

Vì $a-b=1 \Rightarrow a=b+1$ khi đó

$$P = \frac{a^2+b^2}{b} = \frac{(b+1)^2+b^2}{b} = \frac{2b^2+2b+1}{b} = 2b + \frac{1}{b} + 2 \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(Theo bất đẳng thức Côsi)

b) $x_0 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x_0^2 &= 2 + \sqrt{2+\sqrt{3}} + 6 - 3\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
&= 8 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4-(2+\sqrt{3})} \\
&= 8 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3 \cdot (2-\sqrt{3})} \\
\Rightarrow x_0^2 - 8 &= -2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3 \cdot (2-\sqrt{3})} \\
\Rightarrow (x_0^2 - 8)^2 &= \left[-2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3 \cdot (2-\sqrt{3})} \right]^2 \\
\Leftrightarrow x_0^4 - 16x_0^2 + 64 &= 4(2+\sqrt{3}) + 12 \cdot (2-\sqrt{3}) + 8\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow x_0^4 - 16x_0^2 + 64 &= 32 \\
\Leftrightarrow x_0^4 - 16x_0^2 + 32 &= 0
\end{aligned}$$

Vậy x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$ (đpcm)

Câu 2.

$$\begin{aligned}
a) \quad x^2 + 8x - 1 &= 2(2x+1)\sqrt{x^2-1} \quad (*) \\
\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 &= (x^2-1) - 2(2x+1)\sqrt{x^2-1} + (4x^2+4x+1) \\
\Leftrightarrow (2x-1)^2 &= (\sqrt{x^2-1} - 2x-1)^2 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = \sqrt{x^2-1} - 2x-1 \\ 2x-1 = -\sqrt{x^2-1} + 2x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} = 4x \quad (1) \\ \sqrt{x^2-1} = 2 \quad (2) \end{cases} \\
(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x^2 = x^2 - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 15x^2 = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Phương trình vô nghiệm

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pm\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}
b) \quad x(1+x+x^2) &= 4y(y+1) \\
\Leftrightarrow x+x^2+x^3 &= 4y^2+4y \\
\Leftrightarrow 1+x+x^2+x^3 &= 4y^2+4y+1 \\
\Leftrightarrow (1+x)(1+x^2) &= (2y+1)^2
\end{aligned}$$

Vì $(2y+1)^2$ là số dương lẻ, $1+x^2 > 0$ nên $1+x$ và $1+x^2$ đều là số dương lẻ

Đặt $d = \text{UCLN}(1+x; 1+x^2)$ nên d là số lẻ

$$1+x : d \Rightarrow (1+x)(1-x) = 1-x^2 : d$$

$$\text{Mà } 1+x^2 : d \Rightarrow 1+x^2+1-x^2 = 2 : d \Rightarrow d = 1 \text{ (vì } d \text{ là số lẻ)}$$

$\Rightarrow 1 + x$ và $1 + x^2$ nguyên tố cùng nhau có tích là số chính phương nên mỗi số là số chính phương

Ta chứng minh hai số chính phương là hai số tự nhiên liên tiếp là hai số 0; 1

Thật vậy: Gọi n là số tự nhiên và $n^2, n^2 + 1$ là hai số chính phương

$\Rightarrow n^2, n^2 + 1$ là hai số chính phương liên tiếp

$\Rightarrow n^2 + 1 = (n + 1)^2$

$\Leftrightarrow 2n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \Rightarrow$ hai số chính phương là hai số tự nhiên liên tiếp là hai số 0; 1

Vì $1 + x^2$ và x^2 là hai số tự nhiên liên tiếp và đều là số chính phương

$\Rightarrow x = 0$ thay vào phương trình có

$$4y(y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $(x; y) = (0; 0); (0; -1)$

Câu 3.

- Kẻ đường cao BH. $\triangle ABH$ vuông tại H nên

$$BH = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{AB}{2}$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H nên $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$$BC^2 = \frac{3AB^2}{4} + \left(AC - \frac{AB}{2}\right)^2$$

$$BC^2 = \frac{3AB^2}{4} + AC^2 - AB \cdot AC + \frac{AB^2}{4}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$$

Hay $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (1)

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(a+b+c) = 3(a+b)(a+c)$$

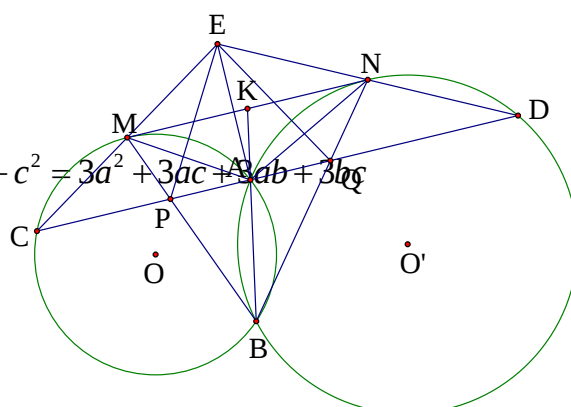
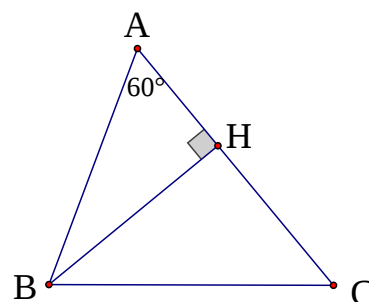
$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2ac + ba + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = 3a^2 + 3ac + 3ab + 3ac$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \text{ luôn đúng theo (1)}$$

- Xét (O) có $NMA = MCA = \frac{1}{2} \text{sdMA}$

Vì $MN \parallel CD \Rightarrow EMN = MCA$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow EMN = NMA$. Tương tự $ENM = MNA$



$\Rightarrow \triangle EMN = \triangle AMN$ (g - c - g) $\Rightarrow ME = MA \Rightarrow \triangle MAE$ cân tại M

Có MN là đường phân giác cũng là đường cao $\Rightarrow EA \perp MN$

Mà $MN \parallel PQ \Rightarrow EA \perp PQ$

AB cắt MN tại K

Xét (O) có $KMA = MBA = \frac{1}{2} \text{sd} MA$ nên $\triangle KMA \sim \triangle KBM$ (g - g)

$\Rightarrow KM^2 = KA \cdot KB$. Tương tự $KN^2 = KA \cdot KB$ nên $KM = KN$.

$\triangle BKM$ có $AP \parallel MK$ nên $\frac{AP}{MK} = \frac{BA}{BK}$

$\triangle BKN$ có $AQ \parallel NK$ nên $\frac{AQ}{NK} = \frac{BA}{BK}$

Suy ra $\frac{AP}{MK} = \frac{AQ}{NK}$ mà $MK = NK$ nên $AP = AQ$

$\triangle EPQ$ có EA vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên $\triangle EPQ$ cân tại E

Suy ra $EP = EQ$.

Câu 4. Ta có:

$$(x-1)(y-1) \geq 1 \Leftrightarrow xy - x - y \geq 0 \Rightarrow xy \geq x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq x + y \geq 4 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2y + xy^2}{(x^2 + y^2 + 8)^2 \cdot \sqrt{1 + x^2y^2}} = \frac{xy(x+y)}{(x^2 + 4 + y^2 + 4)^2 \cdot \sqrt{1 + x^2y^2}} \leq \frac{xy(x+y)}{16(x+y)^2 \cdot \sqrt{1 + x^2y^2}} \\ &= \frac{xy}{16(x+y) \cdot \sqrt{1 + x^2y^2}} \leq \frac{xy}{32\sqrt{xy} \cdot \sqrt{1 + x^2y^2}} = \frac{1}{32} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{xy} + xy}} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{xy} + xy = \frac{1}{xy} + \frac{xy}{16} + \frac{15xy}{16} \geq 2\sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{17}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } A \leq \frac{1}{32} \cdot \sqrt{\frac{4}{17}} = \frac{1}{16\sqrt{17}}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = y = 2. \text{ Vậy } A_{\max} = \frac{1}{16\sqrt{17}}$$

Câu 5.

Xét 15 phần tử: $3^1, 3^2, \dots, 3^{15}$ của X. Vì có tất cả 7 màu nên theo nguyên lý Dirichlet trong 15 phần tử trên có 3 phần tử a, b, c cùng màu.

Giả sử $a > b > c > 1$ thì a là bội của b và b là bội của c (vì chúng cùng là các lũy thừa của 3).

Rõ ràng a, b, c đều lẻ nên $2019^a + 1$ là bội của $2019^b + 1$, $2019^b + 1$ là bội của $2019^c + 1$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 1.

1) Ta có:

$$M = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

$$\frac{M}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}+1} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+1} - \frac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-1) - (3-\sqrt{5})(3\sqrt{5}+1)}{(3\sqrt{5}+1)(3\sqrt{5}-1)} = \frac{24}{44} = \frac{6}{11} \Rightarrow M = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

2) $Q = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$, với $x > 1; x \neq 2$

$$Q = \frac{\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x^2-4x+4}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$Q = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$Q = \frac{|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|}{|x-2|} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

*Nếu $1 < x < 2$ ta có :

$$Q = \frac{1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

* Nếu $x > 2$ ta có :

$$Q = \frac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

Câu 2.

1) Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

$$(x+4)\sqrt{x^2+7} = x^2+4x+7$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+7} + 4\sqrt{x^2+7} = x^2+4x+7$$

$$\Leftrightarrow (x^2+7-x\sqrt{x^2+7}) - (4\sqrt{x^2+7}-4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+7}-x)(\sqrt{x^2+7}-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+7}-x=0 \\ \sqrt{x^2+7}-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+7}=x & (1) \\ \sqrt{x^2+7}=4 & (2) \end{cases}$$

- Phương trình (1) vô nghiệm
- Phương trình (2) có nghiệm là $x = 3$ và $x = -3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = -3$

2) Ta có: $M = \frac{2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5}$

Điều kiện: $a \geq 0$

Đặt: $\frac{2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5} = n \quad (n \in \mathbb{Z})$

Ta có: $\sqrt{a}(n-2) = 2-5n$

Nếu $n = 2 \Rightarrow 0 = -8$ (vô lý)

Nếu $n \neq 2 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{2-5n}{n-2}$

Do $\sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{2-5n}{n-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq n < 2$

Do n nguyên nên $n = 1$ khi đó $a = 9$ (thỏa mãn)

Vậy $a = 9$

Câu 3.

a) Ta có: $x = \sqrt{2x(x-y)+2y-x+2} \quad (1)$

Vì $x > 0$ nên :

$(1) \Leftrightarrow x^2 = 2x(x-y)+2y-x+2 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 2xy - 2y + x = 2 \Leftrightarrow (1-x)(x-2y) = 2$

Do x, y là số nguyên ta có bảng sau

$1-x$	1	2	-1	-2
$x-2y$	2	1	-2	-1
x	0	-1	2	3
y	-1	-1	2	2

Mà $x, y > 0$ nên có các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(2; 2)$ và $(3; 2)$

b) Ta có: $2a^2 + 3ab + 2b^2 : 7$

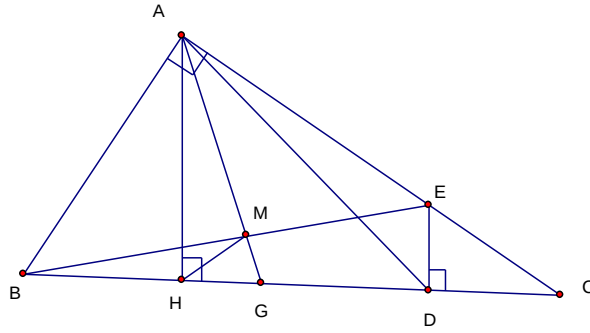
$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 - 2ab) + 7ab : 7 \Rightarrow 2(a-b)^2 + 7ab : 7$

Do $7ab : 7 \quad (a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2(a-b)^2 : 7$ do $(2, 7) = 1$

Từ đó ta có $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) : 7$

Vậy $(a^2 - b^2) : 7$

Câu 4.



1) Xét $\triangle CDE$ và $\triangle CAB$ có C chung $CDE = CAB = 90^\circ$

$$\text{Nên } \triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$$

$$\text{Xét } \triangle BEC \text{ và } \triangle ADC \text{ có } C \text{ chung và } \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$$

Nên $\triangle BEC \sim \triangle ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow BEC = ADC$ (Hai góc tương ứng)

Ta có $HD = HA$ (gt) nên $\triangle ADH$ vuông cân tại H

$$\Rightarrow HDA = 45^\circ \Rightarrow ADC = 135^\circ \Rightarrow BEC = 135^\circ \Rightarrow AEB = 45^\circ$$

$$\triangle ABE \text{ vuông tại } A \quad AB = BE \cdot \sin AEB \Rightarrow m = BE \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BE = m\sqrt{2}$$

2) Ta có tam giác ABE vuông cân tại A có AM là đường trung tuyến đồng thời là đường cao ta có: $BM \cdot BE = AB^2$

$\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ta có: $BH \cdot BC = AB^2$

$$\Rightarrow BM \cdot BE = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{BM}{BC}$$

$$\text{Xét } \triangle BHM \text{ và } \triangle BEC \text{ có } B \text{ chung và } \frac{BH}{BE} = \frac{BM}{BC}$$

Nên $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow BHM = BEC = 135^\circ \Rightarrow AHM = 45^\circ$

3) Tam giác ABE vuông cân tại A có AM là đường trung tuyến nên AM cũng là đường phân giác nên AG là phân giác của BAC

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$ mà $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle DEC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}$$

$$DE \text{ song song } AH \text{ song song với } AH \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HC} = \frac{HD}{HC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{AH+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

Câu 5.

* Ta chứng minh với hai số dương x, y ta luôn có $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ (*)

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

* Áp dụng đẳng thức AM-GM ta có:
$$\sqrt{\frac{a}{b+c+2a} \cdot \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b+c+2a} + \frac{1}{4} \right)$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c+2a}} \leq \frac{a}{b+c+2a} + \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{b+c+2a} = \frac{1}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c+2a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c+2a}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + 1 \right)$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} + 1 \right); \sqrt{\frac{c}{a+b+2c}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} + 1 \right)$

$$\text{Do đó: } M \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} + 3 \right) = \frac{3}{2}$$

Giá trị lớn nhất của M là $\frac{3}{2}$ khi $a = b = c$.

Đề số 24

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \left(x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} : \left[\frac{2x+2\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2x+\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \left[(2\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}+x} \right) \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : (2\sqrt{x}-1) : \frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$$

b) Tính giá trị của A khi $x = 17 - 12\sqrt{2}$

$$\text{Tính } x = 17 - 12\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2}) + 17 - 12\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{15 - 10\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{5(3 - 2\sqrt{2})}{3 - 2\sqrt{2}} = 5$$

c) So sánh A với $\sqrt{A}$ (1 điểm).

$$\text{Biến đổi } A = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$\text{Chứng minh được } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2 \text{ với mọi } x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{A} > 1 \Rightarrow \sqrt{A} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{A}(\sqrt{A} - 1) > 0$$

$$\Rightarrow A - \sqrt{A} > 0 \Rightarrow A > \sqrt{A}$$

Câu 2.

a) Chứng minh rằng $2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < \frac{1}{\sqrt{b}} < 2(\sqrt{b} - \sqrt{c})$ biết a; b; c là ba số thực thoả

mãn điều kiện $a = b + 1 = c + 2$; $c > 0$

Ta có: $a = b + 1 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a > b(1)$.

$b + 1 = c + 2 \Rightarrow b - c = 1 \Rightarrow b > c > 0(2)$. ($c > 0$ theo (gt))

Từ (1) và (2) suy ra $a > b > c > 0$.

$$\text{Mặt khác } a - b = 1 \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

(Vì $a > b > 0$)

$$\Rightarrow 2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Chứng minh tương tự cho trường hợp: $\frac{1}{\sqrt{b}} < 2(\sqrt{b} - \sqrt{c})$.

$$\text{Vậy } 2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < \frac{1}{\sqrt{b}} < 2(\sqrt{b} - \sqrt{c}) \text{ (đpcm).}$$

b) Biểu thức $B = \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009}$ có giá trị là một số tự nhiên

$$\text{Ta có : } B = \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009} = \sqrt{(1 + 2008)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2008 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009}.$$

$$= \sqrt{(2009)^2 - 2 \cdot 2009 \cdot \frac{2008}{2009} + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009} = \sqrt{\left(2009 - \frac{2008}{2009}\right)^2} + \frac{2008}{2009}.$$

$$= \left|2009 - \frac{2008}{2009}\right| + \frac{2008}{2009} = 2009 - \frac{2008}{2009} + \frac{2008}{2009} = 2009.$$

Vậy B có giá trị là một số tự nhiên.

Câu 3.

$$a) \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ (x-1)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(\sqrt{x-1}-1) - \sqrt{x+3}(\sqrt{x-1}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ \sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x-2}=\sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

$x=2$ thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

$$b) \sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5} \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện } x \geq \frac{2}{3}.$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}) \cdot (\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2})}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5} \Leftrightarrow \frac{4x+1-3x+2}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+1-3x+2}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5} \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5} \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5$$

(2)

$$(\text{Vì } x \geq \frac{2}{3} \text{ nên } x+3 > 0).$$

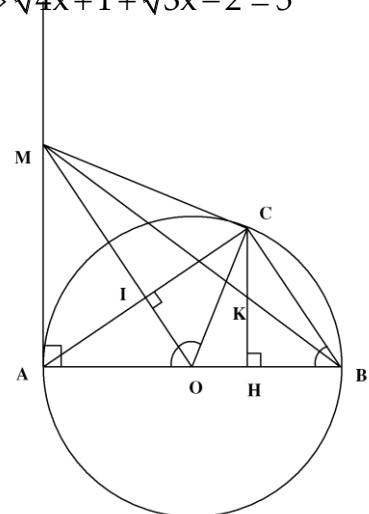
Giải tiếp phương trình (2) ta được nghiệm của phương trình là $x=2$.

Câu 4.

1) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh $OI \perp AC$.

Suy ra $\triangle OIC$ vuông tại I suy ra I thuộc đường tròn



đường kính OC.

$CH \perp AB$ (gt) ΔCHO vuông tại H $\Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính OC.

Suy ra I, H cùng thuộc đường tròn đường kính OC. hay C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R). (2 điểm)

- Chứng minh $AOM = COM$.

- Chứng minh $\Delta AOM = \Delta COM$

- Chứng minh $MC \perp CO$

$\Rightarrow$ MC là tiếp tuyến của (O; R).

3) Chứng minh K là trung điểm của CH. (2 điểm)

$$\Delta MAB \text{ có } KH // MA \text{ (cùng } \perp AB) \Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow KH = \frac{AM \cdot HB}{AB} = \frac{AM \cdot HB}{2R} \quad (1)$$

Chứng minh cho $CB // MO \Rightarrow AOM = CBH$ (đồng vị).

C/m ΔMAO đồng dạng với ΔCHB

$$\Rightarrow \frac{MA}{CH} = \frac{AO}{HB} \Rightarrow CH = \frac{AM \cdot HB}{AO} = \frac{AM \cdot HB}{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CH = 2KH \Rightarrow CK = KH \Rightarrow K$ là trung điểm của CH.

4) Xác định vị trí của C để chu vi ΔACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$

Ta lại có

$$(AC - CB)^2 \geq 0 \Rightarrow AC^2 + CB^2 \geq 2AC \cdot CB \Rightarrow 2AC^2 + 2CB^2 \geq AC^2 + CB^2 + 2AC \cdot CB$$

$$2(AC^2 + CB^2) \geq (AC + CB)^2 \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2(AC^2 + CB^2)}$$

$$\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2AB^2} \text{ (Pitago)}$$

$$AC + CB \leq \sqrt{2 \cdot 4R^2} \Rightarrow AC + CB \leq 2R\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $AC = CB \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB.

Suy ra $P_{ACB} \leq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$, dấu "=" xảy ra khi M là điểm chính giữa cung AB

Vậy $\max P_{ACB} = 2R(1 + \sqrt{2})$ đạt được khi M là điểm chính giữa cung AB.

Câu 5.

a) Chứng minh giá trị của M là một số nguyên.

$$\text{Biến đổi } M = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{1004} + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{1004}.$$

Đặt $a = 5 + 2\sqrt{6}$; $b = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow a + b = 10$ và $a.b = 1$.

Đặt $U_n = a^n + b^n$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $M = U_{1004}$

Ta có $U_{n+2} = a^{n+2} + b^{n+2} = a.a^{n+1} + b.b^{n+1} = (10 - b)a^{n+1} + (10 - a)b^{n+1}$

$$= 10(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n) = 10U_{n+1} - U_n \text{ (vì } ab = 1).$$

$$\Rightarrow U_{n+2} = 10U_{n+1} - U_n \text{ (*).}$$

Ta thấy $U_0 = 2 \in \mathbb{Z}$; $U_1 = a + b = 10 \in \mathbb{Z}$.

$$U_2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 10^2 - 2.1 = 98 \in \mathbb{Z}.$$

Theo công thức (*) thì $U_3 = 10U_2 - U_1$ mà $U_1, U_2 \in \mathbb{Z}$ suy ra $U_3 \in \mathbb{Z}$.

Lại theo (*) thì $U_4 = 10U_3 - U_2$ cũng có giá trị nguyên.

Quá trình trên lặp đi lặp lại vô hạn suy ra U_n có giá trị nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $M = U_{1004}$ có giá trị là một số nguyên.

a) Tìm chữ số tận cùng của M.

Từ (*) suy ra $U_{n+2} + U_n = 10U_{n+1} : 10$

$$\Rightarrow U_{n+4} - U_n = (U_{n+4} + U_{n+2}) - (U_{n+2} + U_n) : 10 \Rightarrow (U_{n+4} - U_n) : 10 \Rightarrow U_{4k+r} \text{ và } U_r$$

có chữ số tận cùng giống nhau.

$1004 = 4.251$ suy ra U_{1004} và U_0 có chữ số tận cùng giống nhau.

Mà U_0 có chữ số tận cùng là 2 (theo c/m câu a) nên M có chữ số tận cùng bằng 2.

Đề số 25

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x > 0, x \neq 1$

$$A = \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{1}$$

$$A = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} (\sqrt{x}-1)^2 \Leftrightarrow A = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có:

$$A = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$$

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = \sqrt{b} > 0 \\ \sqrt[3]{y} = \sqrt{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = b^3 \\ y^2 = c^3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2} = a$$

Bình phương hai vế được: $b^3 + b^2c + c^3 + bc^2 + 2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2} = a^2$

Biến đổi ta được: $(b+c)^3 = a^2$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = b+c \text{ hay } \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \text{ (đpcm)}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = (m+1)x - (m+1) \\ x + (m-1)[(m+1)x - (m+1)] = m+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = (m+1)x - (m+1) \\ m^2x = m^2 + 1 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất
 $\Rightarrow m \neq 0$

$$\text{Với } m \text{ khác } 0 \text{ hpt có nghiệm duy nhất } (x, y) = \left(\frac{m^2 + 1}{m^2}; \frac{m+1}{m^2} \right)$$

$$\text{Để } x + 5y = 0 \text{ thì } m^2 + 1 + 5(m+1) = 0 \Rightarrow m = -2, m = -3$$

$$\text{b) Đặt } \frac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}} = \frac{x}{y} \quad (x, y \in \mathbb{Z}, xy \neq 0) \Rightarrow ay - bx = (by - cx)\sqrt{2} \quad (*)$$

$$\text{Vì } a, b, c, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow ay - bx \in \mathbb{Z} \Rightarrow (by - cx)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Mà } \sqrt{2} \notin \mathbb{I} \text{ nên từ } (*) \Rightarrow \begin{cases} ay - bx = 0 \\ by - cx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay = bx \\ cx = by \end{cases}$$

$$\Rightarrow acxy = b^2xy \Rightarrow ac = b^2 \text{ (vì } xy \neq 0)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+c)^2 - 2ac + b^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+c-b)(a+c+b)$$

Vì $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố và $a+c-b < a+c+b$

$$\Rightarrow a+b-c = 1 \Rightarrow a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 \quad (1)$$

$$\text{Mà } a, b, c \text{ nguyên dương nên } a \leq a^2, b \leq b^2, c \leq c^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = b = c = 1$, thử lại: Thỏa mãn, kết luận

Câu 3.

1)

a) Với $m = 1$ ta có (d): $y = x + 2$

Lí luận đưa ra đúng phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - x - 2 = 0$

Giải đúng tìm được $x_1 = -1, x_2 = 2$

Tìm được tọa độ giao điểm: $(-1; 1)$ và $(2; 4)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = mx + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0 \quad (*)$$

(P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

Tìm được $m \neq -2$.

c) Ta có: $a^2 - b = b^2 - c \Rightarrow a^2 - b^2 = b - c$

$$\Rightarrow a + b = \frac{b - c}{a - b} \Rightarrow a + b + 1 = \frac{a - c}{a - b}$$

Tương tự: $b + c + 1 = \frac{b - a}{b - c}; c + a + 1 = \frac{c - b}{c - a}$

Tính đúng $M = -1$

2) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{8}$

Đặt $\sqrt{8x+1} = y, y \geq 0$ ta có: $\begin{cases} x^2 - x - 1 = y \\ 8x + 1 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x - 4 = 4y \\ 8x + 1 = y^2 \end{cases}$

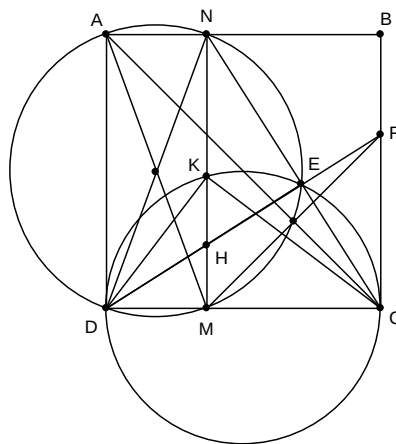
$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = y^2 + 4y \Leftrightarrow (2x+1)^2 = (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 1 \text{ hoặc } y = -2x - 3$$

Với $y = 2x - 1 \Rightarrow \sqrt{8x+1} = 2x - 1$, giải ra được $x = 3$

Với $y = -2x - 3 \Rightarrow \sqrt{8x+1} = -2x - 3$

Câu 4.



a) Chứng minh DN là đ/kính của đường tròn đi qua các điểm A, D, M, E, N

Chứng minh $\angle DEN = 90^\circ$

Chứng minh $\angle DEC = 90^\circ$

Chứng minh C, E, N thẳng hàng

b) Có: $\angle DMN = \angle DEN$ (hq góc nội tiếp) $\Rightarrow \angle DMN = 90^\circ \Rightarrow MN \perp DC$

$\triangle DKC$ vuông tại K có KM là đường cao $\Rightarrow MK^2 = MD \cdot MC$ (1)

$\triangle MHD \sim \triangle MCN$ (g.g) $\Rightarrow MD \cdot MC = MH \cdot MN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH \cdot MN = MK^2$

c) Chứng minh $\triangle DCF = \triangle CBN$ (g.c.g) $\Rightarrow CF = BN$ (3)

Chứng minh tứ giác BCMN là hình chữ nhật $\Rightarrow BN = CM$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow CF = CM \Rightarrow \triangle CMF$ vuông cân tại C mà CA là phân giác của góc BCD (t/c hình vuông) $\Rightarrow CA \perp MF$

Câu 5.

+) Nếu $ac \leq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

+) Nếu $ac > 0 \Rightarrow a$ và c cùng dấu, từ $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 > 0 \Rightarrow b$ và a cùng dấu

$\Rightarrow a, b, c$ cùng dấu. Vì thế ta chỉ cần xét a, b và c cùng dương là đủ

Với a, b, c cùng dương ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 &\Leftrightarrow b \geq \frac{c+4a}{2} \Leftrightarrow b^2 \geq \frac{c^2 + 8ac + 16a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq \frac{c^2 - 8ac + 16a^2}{4} = \frac{(c-4a)^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Đề số 26

Câu 1.

a/ Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1 + x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x + 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 5 + 2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$

$$*M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \\ 2 - \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4. \text{ Vậy } M > 1 \text{ khi } 1 < x < 4 \text{ và } x \neq 3$$

b/ Ta có:

- Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1 + c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Tương tự ta có $1 + a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c}); 1 + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Vậy $H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})}$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = 0$$

Câu 2.

a) Điều kiện $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}}$

Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{5}{x^2} > 0; 6x^2 - 1 > 0$, theo AM-GM ta có

$$\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{5}{x^2}(6x^2 - 1)} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + (6x^2 - 1)}{2}$$

Dấu = có khi $\frac{5}{x^2} = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow 6x^2 - \frac{5}{x^2} \geq 0$, theo côsi ta có $\sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) \cdot 1} \leq \frac{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) + 1}{2}$

Dấu = có khi $6x^2 - \frac{5}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy ta có $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + 6x^2 - 1 + 6x^2 - \frac{5}{x^2} + 1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq 6x^2 \text{ Dấu = có khi } \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy $x = \pm 1$ là nghiệm phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

b) Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Đặt $a = x - \sqrt{3}; b = x^2 + 2\sqrt{3}; c = x - \frac{2}{x}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Từ $a = x - \sqrt{3} \Rightarrow x = a + \sqrt{3}$; từ $b = x^2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = b - 2\sqrt{3}$, nên ta có

$$(a + \sqrt{3})^2 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a + 1) = b - a^2 - 3$$

-Nếu $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{a + 1}$, vì $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b - a^2 - 3}{a + 1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ VL

Vậy $a + 1 = 0$ nên ta có $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b - a^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$

Với $x = \sqrt{3} - 1$ ta có $a = -1; b = 4$ và $c = -2$ nguyên, thỏa mãn điều bài

Câu 3.

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$

Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \dots = (x + 2)(4x^2 + 6x - 3)$ nên ta có $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$

Đặt $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$

Ta có $x + 2 : d \Rightarrow (x + 2)(4x - 2) : d \Rightarrow 4x + 6x - 4 : d$

Ta lại có $4x^2 + 6x - 3 : d \Rightarrow (4x^2 + 6x - 3) - (4x^2 + 6x - 4) = 1 : d \Rightarrow d = 1$

Vậy $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = 1$

mà $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$ nên ta có

$x + 2$ và $4x^2 + 6x - 3$ là số chính phương $\Rightarrow x + 2 = a^2$ và $4x^2 + 6x - 3 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$

Vì $x > 0$ nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x + 3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2$ ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = 100 = 10^2$ là số chính phương.

b/ Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$.

Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$

Vậy $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

Tương tự ta có $\frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$

$$\text{Ta có } OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB}$$

Xét $\triangle OMN$ và $\triangle OCB$ có O chung, có $\frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OCB$,

mà $OE \perp MN$ và $OH \perp BC$ nên ta có

$$\frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OH} \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OA} = \frac{OE}{2OE} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}OC \quad (\text{vì } OH=OA=2OE)$$

$$\text{Ta có } OM \cdot OB = OH^2 = R^2 \quad (\text{cm trên}) \Rightarrow \frac{1}{2}OC \cdot OB = R^2 \Rightarrow OC \cdot OB = 2R^2$$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

$$\text{Ta có } \triangle OMN \sim \triangle OCB \quad (\text{cm trên}) \Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \frac{OE^2}{OH^2} = \frac{OE^2}{OA^2} = \frac{OE^2}{(2OE)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Nên } S_{OMN} = \frac{1}{4}S_{OCB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{8}R \cdot BC \leq \frac{1}{8}R(AB + AC) = \frac{1}{8}R(R + R) = \frac{1}{4}R^2$$

Dấu bằng có khi B, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow H \equiv A$

Vậy diện tích tam giác OMN lớn nhất là $S_{OMN} = \frac{1}{4}R^2$ khi $H \equiv A$

Câu 5.

- Nếu n là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên bài toán chứng minh xong

- Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2 < n < (k+1)^2$. Vì n nguyên dương và $n > k^2 \Rightarrow n \geq k^2 + 1$, vậy ta có:

$$2n - (k+1)^2 \geq 2(k^2 + 1) - (k+1)^2 = \dots = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$$

Vậy mọi k nguyên dương, nên ta có $k^2 < n < (k+1)^2 \leq 2n$

Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Đề số 27

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M: Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{8Vây } M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \quad (\text{với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9) \quad (*)$$

$$2) M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 : \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

$$U(3) \in \{\pm 1; \pm 3\} \quad \text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$$

$$\text{Nên } \sqrt{x}+1 \in \{1; 3\}$$

Xảy ra các trường hợp sau:

$$\cdot \sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (TMĐK (*))}$$

$$\cdot \sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$$

(không TMĐK (*) loại)

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên.

$$b) x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

$$\text{Có } \sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = |4-\sqrt{2}| = 4-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}+4} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1|$$

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}+1}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3}+1| - \sqrt{3} = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$$

$$\text{Với } x=1. \text{ Ta có } P = 3.1^{2013} + 5.1^{2011} + 2006 = 3+5+2006 = 2014$$

Vậy với $x=1$ thì $P=2014$

Câu 2.

$$a. \text{ Ta có: } \sqrt{(1+x^2)^3} - 4x^3 = 1 - 3x^4 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } 4x^3 + 1 - 3x^4 = -3x^4 + 4x^3 + x^2 - x^2 + 1 = 1 + x^2 - x^2(3x^2 - 4x + 1) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(1+x^2)^3} - (1+x^2) = -x^2(3x^2 - 4x + 1) \quad (3)$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{1+x^2}, \text{ với } y \geq 1. \text{ Suy ra } x^2 = y^2 - 1$$

$$\text{Thay vào (3): } y^3 - y^2 = (1-y^2)(3x^2 - 4x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y^2(y-1) - (1-y^2)(3x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)[y^2 + (y+1)(3x^2 - 4x + 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ y+(y+1)(3x^2 - 4x + 1)=0 \end{cases}$$

* Với $y=1$ thì $x=0$ thỏa mãn phương trình.

$$* \text{ Với } y \neq 1 \text{ và } y \geq 1, \text{ ta có: } y^2 + (y+1)(3x^2 - 4x + 1) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Vì } 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3} \text{ và } y > 1 \text{ thay vào vế trái của (4)}$$

$$y^2 - (y+1)\frac{1}{3} = \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{36} > \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{36} = \frac{1}{3} \text{ lớn hơn.}$$

Do đó (4) vô nghiệm

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$

b) Giả sử $n^2 + 2014 = k^2 (k^2 \in N)$

$$\Leftrightarrow 2014 = k^2 - n^2 \Leftrightarrow 2014 = (k+n)(k-n) \quad (1)$$

Suy ra $(k+n)$ và $(k-n) = 2k$ là số chẵn nên $(k+n)$ và $(k-n)$ cùng tính chẵn lẻ

Do 2014 là số chẵn nên $(k+n)$ và $(k-n)$ đều là số chẵn

$$\Rightarrow (k+n)(k-n) : 4$$

Khi đó từ (1) suy ra ta lại có $2014 : 4$ (điều này vô lí)

Vậy không có số nguyên n nào để $n^2 + 2014$ là số chính phương

Câu 3.

a) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m-2)x + (m-1)y = 1$ đi qua điểm cố định

$N(x_0; y_0)$ với mọi m là :

$$(m-2)x_0 + (m-1)y_0 = 1 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow mx_0 - 2x_0 + my_0 - y_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0)m - (2x_0 + y_0 + 1) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1; 1)$

b) Điều kiện $a, b, c \neq 0$

$$\text{Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \text{ Suy ra } (bc+ac+ab)(a+b+c) - abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow a+b=0 \text{ hoặc } b+c=0 \text{ hoặc } c+a=0$$

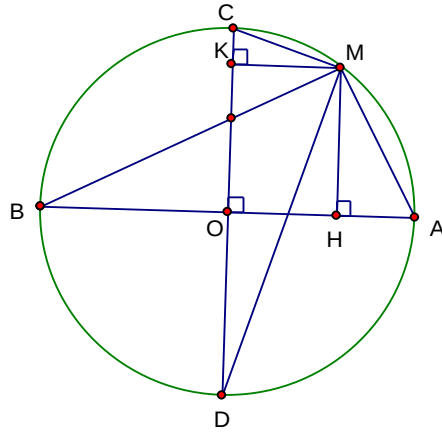
$$\text{Nếu } a+b=0 \text{ mà } a+b+c=2013 \text{ nên } c=2013$$

$$\text{Nếu } b+c=0 \text{ mà } a+b+c=2013 \text{ nên } a=2013$$

$$\text{Nếu } a+c=0 \text{ mà } a+b+c=2013 \text{ nên } b=2013$$

Vậy 1 trong các số a, c, b bằng 2013

Câu 4.



a) Vì M thuộc (O) nên các tam giác: BMA và CMD vuông tại M nên:

$$\sin^2 MBA + \sin^2 MAB + \sin^2 MCD + \sin^2 MDC =$$

$$(\sin^2 MBA + \cos^2 MBA) + (\sin^2 MCD + \cos^2 MCD) = 1 + 1 = 2$$

b) Chứng minh: $OK^2 = AH(2R - AH)$

Thật vậy: KOHM là hình chữ nhật nên: $OK = MH$

Mà $MH^2 = HA \cdot HB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông MAB có MH đường cao)

và $BH = AB - AH = 2R - AH$

Suy ra: $OK^2 = MH^2 = AH(2R - AH)$ (1đ)

c) $P = MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD = AB \cdot MH \cdot CD \cdot MK = 4R^2 \cdot OH \cdot MH$ (Vì $MK = OH$)

$$\text{Mà } OH \cdot MH \leq \frac{OH^2 + MH^2}{2} = \frac{OM^2}{2} = \frac{R^2}{2} \text{ (Pitago)}$$

$$\text{Vậy } P \leq 4R^2 \cdot \frac{R^2}{2} = 2R^4. \text{ đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow MH = OH \Leftrightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Câu 5.

Đặt $x = b + c - a$, $y = a + c - b$, $z = a + b - c$ thì $x, y, z > 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} b + c - a = x \\ a + c - b = y \\ a + b - c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{z + y}{2} \\ b = \frac{x + z}{2} \\ c = \frac{x + y}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$P = \frac{2y + 2z}{x} + \frac{9z + 9x}{2y} + \frac{8x + 8y}{z}$$

$$= \left(\frac{2y}{x} + \frac{9x}{2y} \right) + \left(\frac{2z}{x} + \frac{8x}{z} \right) + \left(\frac{9z}{2y} + \frac{8y}{z} \right) \geq 2\sqrt{9} + 2\sqrt{16} + 2\sqrt{36} = 26$$

$$\text{Điều kiện xảy ra khi } \begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{9x}{2y} \\ \frac{2z}{x} = \frac{8x}{z} \\ \frac{9z}{2y} = \frac{8y}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = 9x^2 \\ 2z^2 = 8x^2 \\ 9z^2 = 8y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 26 khi và chỉ khi } \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

Đề số 28

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có: } A &= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x \geq 0, x \neq 1 \text{ thì } A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

2) Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = 1$$

Câu 2.

1) Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$.

Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Do đó ta có phương trình:

$$2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 5 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(2y - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

*Với $y - 1 = 0$ ta có $x + \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm vì

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$$

*Với $2y - 5 = 0$ ta có $2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ và $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình

2) $2\sqrt{3x+10} = x^2 + 9x + 20$ Điều kiện xác định: $x \geq \frac{-10}{3}$

$$2\sqrt{3x+10} = x^2 + 9x + 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 20 - 2\sqrt{3x+10} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) + 3x + 10 - 2\sqrt{3x+10} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (\sqrt{3x+10} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 0 \\ (\sqrt{3x+10} - 1)^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{vì } (x+3)^2 \geq 0 \text{ và } (\sqrt{3x+10} - 1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \\ \sqrt{3x+10} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -3$

Câu 3.

1) Ta có : $x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2015x - 2015y - 2015 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x+y+1) - 2015(x+y+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2015)(x+y+1) = 1$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-2015$ và $x+y+1 \in \mathbb{Z}$ và là ước của 1.

Ta có các trường hợp sau:

$$* \begin{cases} x-2015=1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2016 \\ y=-2016 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x-2015=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2014 \\ y=-2016 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $(2016; -2016); (2014; -2016)$

2) Vì k là số nguyên tố suy ra $k^2 + 4 > 5; k^2 + 16 > 5$

- Xét $k = 5n$ ($n \in \mathbb{N}$) mà k là số nguyên tố nên $k = 5$.

Khi đó $k^2 + 4 = 29; k^2 + 16 = 41$ đều là các số nguyên tố.

- Xét $k = 5n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow k^2 = 25n^2 + 10n + 1 \Rightarrow k^2 + 4 \div 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

- Xét $k = 5n+2$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow k^2 = 25n^2 + 20n + 4 \Rightarrow k^2 + 16 \div 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét $k = 5n+3$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow k^2 = 25n^2 + 30n + 9 \Rightarrow k^2 + 16 \div 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét $k = 5n+4$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow k^2 = 25n^2 + 40n + 16 \Rightarrow k^2 + 4 \div 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

Vậy để $k^2 + 4$ và $k^2 + 16$ là các số nguyên tố thì $k = 5$.

Câu 4.

1) Hình vẽ

Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$, ta có:

$OB = OC$ (vì $ABCD$ là hình vuông)

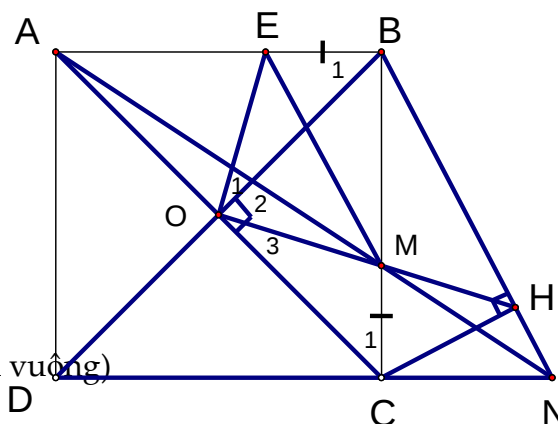
$\angle B_1 = \angle C_1 = 45^\circ$

$BE = CM$ (gt)

Suy ra $\triangle OEB = \triangle OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OE = OM$ và $\angle O_1 = \angle O_3$

Lại có $\angle O_2 + \angle O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ (vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông)



$$\Rightarrow \angle O_2 + \angle O_1 = \angle EOM = 90^\circ$$

kết hợp với $OE = OM$

$\Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O .

2) Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC} \text{ (Theo hệ quả ĐL Ta-lét) (*)}$$

Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = BC \Rightarrow AE = BM$

$$\text{Thay vào (*) ta có: } \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB}$$

$$\triangle ABN \text{ có } \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$$

(theo ĐL Ta-lét đảo)

3) Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle OME = \angle OHB$ (cặp góc đồng vị)

Mà $\angle OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$$\Rightarrow \angle MHB = 45^\circ = \angle C_1$$

$$\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{MB} = \frac{MC}{MH}$$

kết hợp $\angle OMB = \angle CMH$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle OBM = \angle MHC = 45^\circ$$

$$\text{Ta có } \angle BHC = \angle BHM + \angle MHC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Do đó $CH \perp BN$

Câu 5.

$$\text{Chứng minh được BĐT: } \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Áp dụng BĐT (*) vào bài toán ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{x+y+x+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

$$\frac{1}{x+2y+z} = \frac{1}{x+y+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} = \frac{1}{x+z+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right)$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right)$$

Tiếp tục áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right); \quad \frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = \frac{3}{4}$$

Đề số 29

Câu 1.

a) Từ giả thiết ta có:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + x + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 + (y-2)^3 + x + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4) \left[(x-2)^2 - (x-2)(y-2) + (y-2)^2 + 1 \right] = 0$$

$$\text{Vì } (x-2)^2 - (x-2)(y-2) + (y-2)^2 + 1 = \left(x-2 - \frac{y-2}{4} \right)^2 + \frac{3(y-2)^2}{4} + 1 > 0$$

$$\text{Do đó } x+y-4=0 \Rightarrow A = (x+y) \left[(x+y)^2 - 3xy \right] + 12xy = 4(16-3xy) + 12xy = 64$$

Vậy $A=64$.

b) Ta có

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2017$$

$$= (x^6 - x^5 - x^4) + (-2x^5 + 2x^4 + 2x^3) + (2x^4 - 2x^3 - 2x^2) + (-x^3 + x^2 + x) + (x^2 - x - 1) + 2018$$

$$= (x^2 - x - 1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 1) + 2018 = 2018$$

$$x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2017$$

$$= (x^6 - x^5 - x^4) + (x^5 - x^4 - x^3) + (2x^4 - 2x^3 - 2x^2) + (2x^3 - 2x^2 - 2x) + (x^2 - x - 1) + 2018$$

$$= (x^2 - x - 1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + 2018 = 2018$$

Do đó $Q=1$.

c) Từ $x+y=1 \Rightarrow x=1-y; y=1-x$. Khi đó

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} = \frac{1-y}{y^3-1} - \frac{1-x}{x^3-1}$$

$$= \frac{-1}{y^2+y+1} + \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{-x^2-x-1+y^2+y+1}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(y-x)(y+x+1)}{x^2y^2 + xy(x+y) + x^2 + y^2 + xy + x + y + 1} \\
&= \frac{2(y-x)}{x^2y^2 + 2xy + x^2 + y^2 + 2} = \frac{2(y-x)}{x^2y^2 + 3} \\
&\Rightarrow \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0.
\end{aligned}$$

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $a, b \neq 0; a \neq b$.

Ta có

$$|2a-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1=1 \\ 2a-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=0 \end{cases}. \text{ Vì } a \neq 0 \text{ nên } a=1$$

$$|b+1|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b+1=\frac{1}{2} \\ b+1=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
B &= 2 - \left(\frac{1}{1-b} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{b}{1-b} \right) \cdot \frac{1-b+b^2}{1-b} \\
&= 2 - \frac{(1+b)b + (1-b^2)(1-b)}{b(1-b)} \cdot \frac{1-b}{1-b+b^2} \\
&= 2 - \frac{1+b^3}{b(1-b+b^2)} = 2 - \frac{1+b}{b} = \frac{b-1}{b}
\end{aligned}$$

$$\text{Với } b = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 3.$$

$$\text{Với } b = -\frac{3}{2} \Rightarrow B = \frac{5}{3}.$$

b) Gọi đa thức $Q(x) = P(x) - (x+1)$ ta có $Q(2015) = Q(2016) = Q(2017) = 0$

Vì $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên $Q(x)$ cũng có hệ số cao nhất bằng 1.

Do đó $Q(x)$ có dạng $Q(x) = (x-2015)(x-2016)(x-2017)(x-a)$

Suy ra $P(x) = (x-2015)(x-2016)(x-2017)(x-a) + (x+1)$

Ta có

$$\begin{aligned}
P(2014) + P(2018) &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (2014-a) + 2015 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2018-a) + 2019 \\
&= (-6) \cdot 2014 + 6a + 6 \cdot 2018 - 6a + 4034 = 4058
\end{aligned}$$

Câu 3.

a) ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq -4; x \neq -7; x \neq -10$.

Phương trình ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{3}{(x+4)(x+7)} + \frac{3}{(x+7)(x+10)} = \frac{9}{4x-2} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{4x-2} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+10)} = \frac{1}{4x-2} \\
& \Leftrightarrow (x+1)(x+10) = 4x-2 \\
& \Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+3)(x+4) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3(n) \\ x = -4(l) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-3\}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
& x^2 - xy + y^2 = 3 \\
& \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + 4y^2 = 12 \\
& \Leftrightarrow (2x - y)^2 = 3(4 - y^2) \geq 0 \\
& \Rightarrow y^2 \leq 4 \\
& \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2 \\
& \bullet \text{ Với } y = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \\
& \bullet \text{ Với } y = -1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \\
& \bullet \text{ Với } y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\
& \bullet \text{ Với } y = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\
& \bullet \text{ Với } y = 0 \Rightarrow x^2 = 3(l)
\end{aligned}$$

Vậy $(x, y) \in \{(-2, -1); (1, -1); (-1, 1); (2, 1); (-1, -2); (1, 2)\}$.

Câu 4.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
F &= 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y + 3 \\
&= y^2 + 4x^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y + x^2 + y^2 + 2xy + 2 \\
&= (y - 2x + 1)^2 + (x + y)^2 + 2
\end{aligned}$$

Do đó $F \geq 2$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Vậy $\min F = 2$

b) Đặt $A = 2^n + 3^n + 4^n$. Nếu $n=1$ thì $A=9$ (thỏa mãn)

Xét $n > 1$ hay $n \geq 2$ thì $2^n + 4^n$ chia hết cho 4.

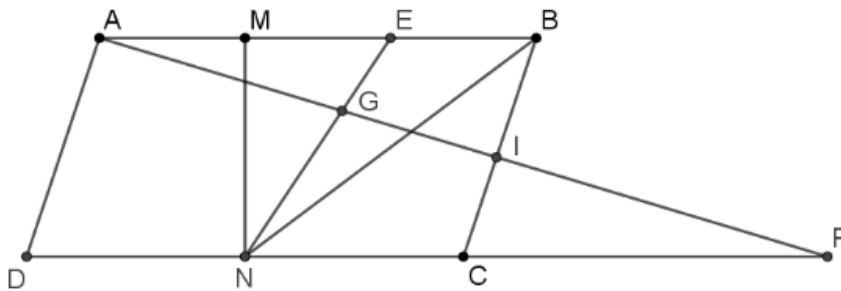
Ta có 3^n chia 4 dư 1 với n chẵn hoặc -1 với n lẻ. Mà một số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên A phải chia 4 dư 1 nên 3^n phải chia 4 dư 1. Suy ra n chẵn.

Với n chẵn: 2^n chia 3 dư 1, 4^n chia 3 dư 1, 3^n chia hết cho 3.

Do đó A chia 3 dư 2 (vô lí, vì một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1).

Vậy $n=1$.

Câu 5.



a) Gọi P là giao điểm của tia AI và tia DC

Áp dụng định lí Thales, ta có:

$$\frac{AE}{NP} = \frac{GE}{GN} = \frac{1}{2} \Rightarrow NP = 2AE \Rightarrow NC + CP = 2 \cdot \frac{2}{3} AB$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB + CP = \frac{4}{3} AB \Rightarrow CP = \frac{5}{6} AB$$

$$\text{Suy ra } \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CP} = \frac{6}{5}$$

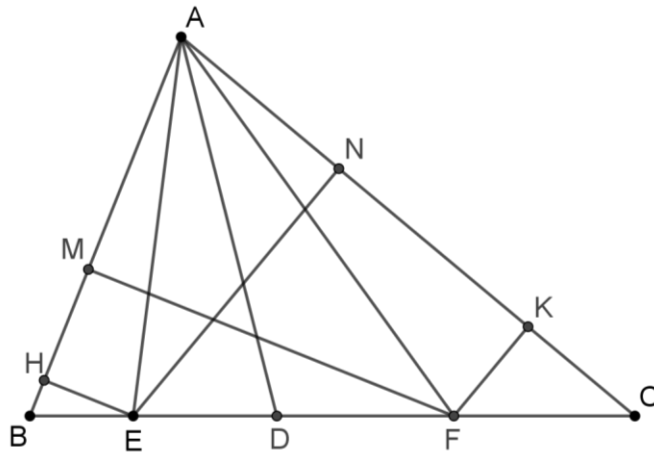
$$\text{Ta có } \frac{AG}{PA} = \frac{GE}{EN} = \frac{1}{3}; \frac{IA}{IP} = \frac{IB}{IC} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IP + IA} = \frac{6}{5 + 6} \Rightarrow \frac{IA}{PA} = \frac{6}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{GI}{PA} = \frac{IA}{PA} - \frac{AG}{PA} = \frac{6}{11} - \frac{1}{3} = \frac{7}{33}$$

$$\text{Do đó } \frac{AG}{GI} = \frac{AG}{PA} \cdot \frac{PA}{GI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{33}{7} = \frac{11}{7}.$$

b)



Kẻ $EH \perp AB$ tại H , $EN \perp AC$ tại N , $FM \perp AB$ tại M và $FK \perp AC$ tại K

Vì $EAD = FAD$ và $BAD = CAD$

$\Rightarrow BAE = CAF$ và $BAF = CAE$

$$\Rightarrow \triangle HAE \sim \triangle KAF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{HE}{KF}$$

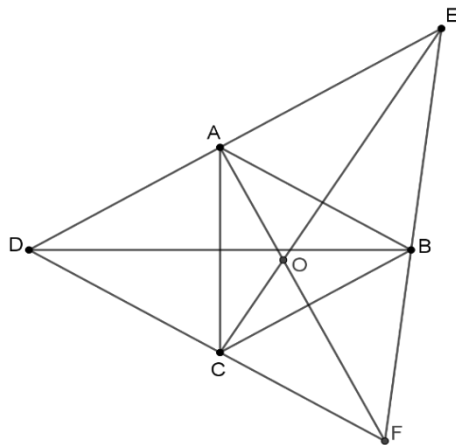
$$\text{Lại có } \frac{S_{ABE}}{S_{ACF}} = \frac{BE}{CF} = \frac{HE \cdot AB}{KF \cdot AC} = \frac{AE \cdot AB}{AF \cdot AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AE \cdot AB}{AF \cdot AC} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \Rightarrow \frac{BF}{CE} = \frac{AF \cdot AB}{AE \cdot AC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{BE \cdot BF}{CE \cdot CF} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

c)



Vì $AC = AD = BC = CD$ nên các $\triangle ACD$ và $\triangle ABC$ đều.

Ta có $ABE = CFB$ và $BAE = FCB = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CFB$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AB}{CF} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{CF}$$

$$\Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta CAF$$

$$\Rightarrow CFA = ACE \text{ mà } FAB = CFA (AB // DF)$$

$$\Rightarrow ACE = FAB$$

$$\text{Do đó } CAF + FAB = CAB = 60^\circ$$

$$\Rightarrow CAF + ACE = 60^\circ \Rightarrow EOF = 120^\circ.$$

Đề số 30

Câu 1.

1. a) ĐKXĐ: $x > 0; y > 0; x \neq y$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} + \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} \\ &= \sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \end{aligned}$$

b) Với $x=3+\sqrt{5}; y=3-\sqrt{5}$ ta có: $x > y$ do đó:

$$A = \frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} > 0$$

$$\text{Mà } A^2 = \frac{(xy)^2}{x+y-2\sqrt{xy}} = \frac{\left[(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\right]^2}{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})-2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}} = \frac{4^2}{6-2.2} = 8$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$2. \text{ Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \neq 0 \quad (\text{Do } a \neq b \neq c)$$

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; a+c=-b; b+c=-a \quad (2)$$

Mặt khác:

$$P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{ab(b-a) + bc(b-c) + ac(c-a)}{abc}$$

$$P = \frac{ab(a-b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \quad (3)$$

Hơn nữa:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a-b=z \\ b-c=x \\ c-a=y \end{cases} \quad \text{Ta có: } \begin{cases} x-y=a+b-2c=-3c \\ y-z=b+c-2a=-3a \\ z-x=a+c-2b=-3b \end{cases} \quad (\text{do (2)})$$

Vì thế:

$$Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-y) \cdot (y-z) \cdot (x-z)}{xyz} \quad (\text{Biến đổi tương tự rút gọn } P)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3c) \cdot (-3a) \cdot [-(-3b)]}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)}$$

$$= \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4) ta có: } P \cdot Q = \frac{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (a-c)}{abc} \cdot \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} = 9$$

Vậy $P \cdot Q = 9$

Câu 2.

$$\text{a) ĐKXĐ: } x \neq -1. \text{ Đặt } x \left(\frac{5-x}{x+1} \right) = a ; x + \frac{5-x}{x+1} = b$$

$$\text{Ta có: } a+b = x \left(\frac{5-x}{x+1} \right) + \left(x + \frac{5-x}{x+1} \right) = \frac{5x - x^2 + x^2 + x + 5 - x}{x+1} = 5$$

$$\text{Mà } ab = 6 \text{ Do đó } \begin{cases} ab=6 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

Với $a = 2; b = 3$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

Với $a = 3; b = 2$ thì $x^2 - 2x + 3 = 0$ (PT vô nghiệm)

$$\text{b) Giải phương trình: } (4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x-1 \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2+1} = y$ ($y \geq 1$) Ta có:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (4x-1).y = 2y^2 + 2x - 1 \\
&\Leftrightarrow 2y^2 - 4xy + 2x + y - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2y^2 - 4xy + 2y) - (y - 2x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y(y - 2x + 1) - (y - 2x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (y - 2x + 1).(2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2} < 1 \text{ (L)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \text{ (ĐK : } x \geq 1) \\
&\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \\
&\Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (KTM)} \\ x = \frac{4}{3} \text{ (TM)} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

Câu 3.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

$$y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 8xy - 28x - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y - 7)(2y + 7 + 4x) = -1$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2y - 7 = 1 \\ 2y + 7 + 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2y - 7 = -1 \\ 2y + 7 + 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $x = -4, y = 4$ hoặc $x = -3, y = 3$

b) Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố

Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không phải nguyên tố;

Xét $n = 1$ thì $A = 3$ nguyên tố.

Xét $n > 1$: $A = n^{2012} - n^2 + n^{2002} - n + n^2 + n + 1$

$$= n^2((n^3)^{670} - 1) + n((n^3)^{667} - 1) + (n^2 + n + 1)$$

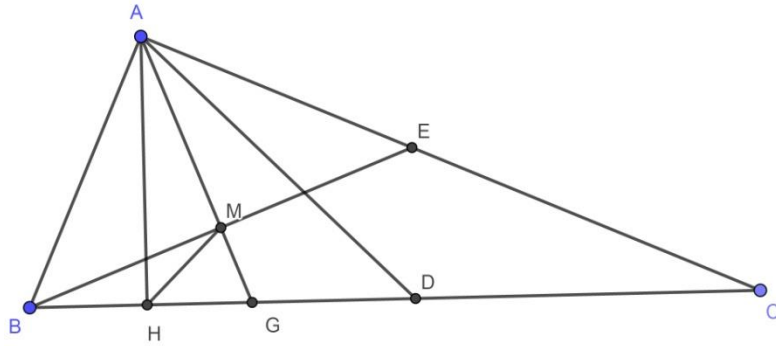
Mà $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Tương tự, $(n^3)^{667} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.

Do đó A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ nên A là hợp số.

Số tự nhiên cần tìm $n = 1$.

Câu 4. (6,0 điểm)



a) Chứng minh hai tam giác ADC và BEC đồng dạng. Biết $AB = m$, tính BE theo m .

C/m: $\triangle CDE$ và $\triangle CAB$ đồng dạng (g.g)

Tam giác ADC và tam giác BEC :

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (Vì hai tam giác } CDE \text{ và } CAB \text{ đồng dạng)}$$

Góc C : chung

Suy ra tam giác ADC đồng dạng tam giác BEC (c.g.c)

C/m: Tam giác AHD vuông cân tại $H \Rightarrow \angle ADH = 45^\circ \Rightarrow \angle ADC = 135^\circ$

$\triangle ADC$ đồng dạng với $\triangle BEC$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle BEC$$

$$\Rightarrow \angle BEC = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AEB = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle AEB$ vuông cân tại A

$$\text{Do đó, } BE = m\sqrt{2}$$

b) Gọi M là trung điểm của BE . Chứng minh rằng: $\triangle BHM \sim \triangle BEC$. Tính góc AHM

- Có: $AB^2 = BH \cdot BC$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow 2AB^2 = 2BH \cdot BC$$

$$\Rightarrow BE^2 = 2BH \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{2BC} = \frac{BH}{BE} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE} \text{ (Vì } BE = 2BM)$$

- C/m: $\triangle BHM$ và $\triangle BEC$ đồng dạng (c.g.c)

- Vì $\triangle BHM$ và $\triangle BEC$ đồng dạng (cmt)

$$\Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$$

c) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh rằng: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$

Tam giác ABE cân tại E nên AM còn là phân giác của góc BAC

$$\text{Suy ra: } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} \text{ (T/c đường Phân giác) (1)}$$

- C/m: $\triangle AHC$ và $\triangle BAC$ đồng dạng (g.)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HD}{HC} = \frac{AB}{AC} \text{ (Do } AH = HD) \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

Câu 5.

$$\text{Áp dụng BĐT } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (Với } a, b > 0) \Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z} + \frac{4}{y+z} \right) \\ &= \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đề số 31

Câu 1.

a) Với $x, y > 0$ và $xy \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} : \\ &\quad \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)+(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)-(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$\frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

b) Ta có:

$$x = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3} = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(\sqrt{20}+1)^2}+3} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{20}+4} = \frac{2}{2(\sqrt{5}+2)} = \sqrt{5}-2$$

$$\text{Suy ra: } x^2 - 4x - 1 = (\sqrt{5}-2)^2 + 4(\sqrt{5}-2) - 1 = 0 \Rightarrow P = (-1)^{2017} = -1.$$

Câu 2. 1. Ta có: $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2}$.

Vì $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là một nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + 1 = 0$ nên:

$$17a + 12a\sqrt{2} + 3b + 2b\sqrt{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(12a + 2b) = -17a - 3b - 1.$$

Do a, b là các số hữu tỉ nên $-17a - 3b - 1$ và $12a + 2b$ là các số hữu tỉ.

Suy ra $\sqrt{2}(12a + 2b)$ là 1 số hữu tỉ.

$$\text{Do đó } \begin{cases} 12a + 2b = 0 \\ 17a + 3b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}.$$

$$2. \text{ Ta có } p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1).$$

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$$\Rightarrow p^2 + 1 \text{ và } p^2 - 1 \text{ là các số chẵn}$$

$$\Rightarrow p^4 - 1 \text{ chia hết cho 4}$$

$$\Rightarrow p^{20} - 1 \text{ chia hết cho 4}$$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4; 25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

3. Ta có:

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2)^2 - (2bc)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc) \cdot (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) < 0 \quad (1)$$

Vì $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên:

$$(a-b-c) < 0; (a+b+c) > 0; (a-b+c) > 0; (a+b-c) > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3.

1. Ta có: $x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x-2)(x^2 - x - 1)$

* Xét $x-2=0 \Rightarrow x=2$: thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Xét $x^2 - x - 1 = 0$: Loại.

* Xét $x-2 = x^2 - x - 1$ ta có: $x=1$.

* TH $x \neq 2; x \neq 1$. Với x nguyên ta chứng minh được $(x-1; x^2 - x - 1) = 1$.

Nên $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương khi $x-2$ và $x^2 - x - 1$ cùng là số chính phương.

Để $x^2 - x - 1$ là số chính phương thì $x^2 - x - 1 = y^2$ với $y \in \mathbb{Z}$.

Tìm được $x=2$ (loại do $x \neq 2$) và $x=-1$. Thử lại $x=-1$ ta có $x^3 - 3x^2 + x + 2$ có giá trị bằng -1 không phải là số chính phương nên $\Rightarrow x=-1$ (loại).

Vậy $x=2$ hoặc $x=1$ thì $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x} + 2\sqrt{x+2} = 2x + \sqrt{x + \frac{6}{x} + 5} \quad (*)$.

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+3)} + 2\sqrt{x+2} - 2x - \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{x+3}{x}} - \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}} + 2\sqrt{x+2} - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{2}}(x - \sqrt{x+2}) - 2(x - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2})\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2\right) = 0$$

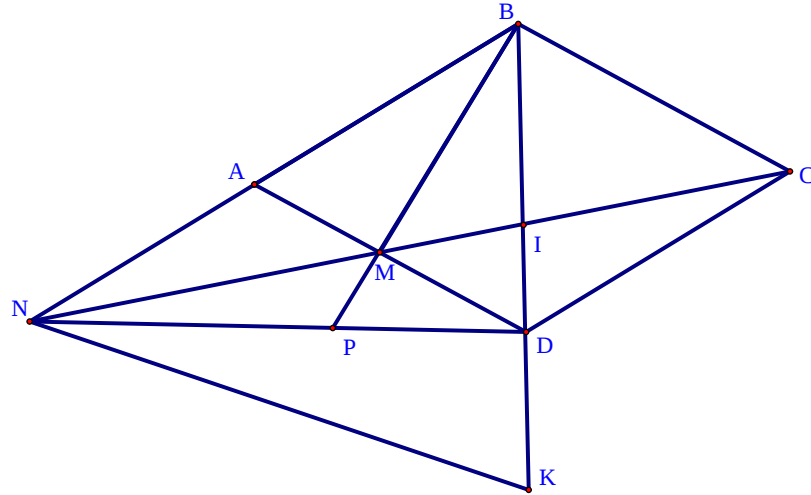
$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x+2} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2 = 0$$

Nếu $x - \sqrt{x+2} = 0$ ta có $x=2$ thỏa mãn.

Nếu $\sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2 = 0$ ta có $x=1$ thỏa mãn.

Vậy $S = \{1; 2\}$.

Câu 4.



+ Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC = CD = AD = a$.

+ BI là đường phân giác của tam giác BNC nên $\frac{IC}{IN} = \frac{BC}{BN} = \frac{a}{BN}$.

+ Vì $AM \parallel BC$ nên áp dụng định lý Ta lét trong tam giác NBC ta có:

$$\frac{MC}{CN} = \frac{AB}{BN} = \frac{a}{BN}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{MC}{CN} = \frac{IC}{IN} \left(= \frac{a}{BN} \right) \Rightarrow IC \cdot CN = IN \cdot CM.$$

+ Dễ dàng chứng minh được hai tam giác BNC và DCM đồng dạng với nhau (g-g).

$$\Rightarrow \frac{BC}{DM} = \frac{BN}{DC} \Rightarrow DM \cdot BN = a^2$$

Ta có $AB = AD = a$ và $BD = a \Rightarrow \triangle ABD$ đều $\angle ABD = \angle BDM = 60^\circ$.

$$\text{Lại có } DM \cdot BN = a^2 \Rightarrow \frac{a}{DM} = \frac{BN}{a} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{BN}{BD} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ hai tam giác MDB và DBN đồng dạng (c-g-c) $\Rightarrow \angle BND = \angle DBM$.

Xét hai tam giác DBP và DNB có góc D chung và $\angle BND = \angle DBM$.

$\Rightarrow$ hai tam giác DBP và DNB đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \angle NBD = \angle BPD = 60^\circ$.

Vì S_{ABD} không đổi $\Rightarrow S_{ADKN}$ lớn nhất khi $S_{ADKN} + S_{ABD}$ lớn nhất hay S_{NBK} lớn nhất.

Thật vậy ta có: $S_{NBK} = \frac{1}{2} NB \cdot BK \cdot \sin 60^\circ$ (Học sinh phải chứng minh công thức này).

$$\Rightarrow S_{NBK} = \frac{1}{4} NB \cdot BK \cdot \sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } NB \cdot BK \leq \left(\frac{NB + BK}{2} \right)^2 = 4a^2 \Rightarrow S_{NBK} \leq a^2 \sqrt{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $BN = BK = 2a$, mà $AN + DK = 2a$, $BA = BD = a$. Vậy N, K cách A, D một khoảng là a .

Câu 5.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^5 + \frac{1}{a} \geq 2a^2$; $b^5 + \frac{1}{b} \geq 2b^2$; $c^5 + \frac{1}{c} \geq 2c^2$.

Từ đó suy ra: $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$ (1).

Mặt khác $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$. Suy ra:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c) - 3 = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Đề số 32

Câu 1. 1. a, Ta có: $x \geq 0, x \neq 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b, Vì $x \geq 0, x \neq 1$ ta luôn có $A > 0$

Lại có: $x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$ hay $A \leq 2$.

Vậy: $0 < A \leq 2$.

2. Áp dụng tính chất: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$. Ta có:

$$\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2+x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Từ giả thiết $-2 < x < 2$ suy ra:

$$\frac{2-x}{2+x} > 0 \Rightarrow \frac{2-x}{2+x} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \Rightarrow \frac{2-x}{2+x} = (3+2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = -17-12\sqrt{2}$$

Câu 2. a) Điều kiện: $x \geq -5$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x &= 6\sqrt{x+5} - 30 \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5} - 3)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{x+5}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4. \end{aligned}$$

Vậy $x = 4$.

2. a, Hoành độ điểm G là nghiệm của phương trình:

$$(m-1)x - m^2 - 2m = (m-2)x - m^2 - m + 1 \Leftrightarrow x = m+1$$

Tung độ điểm $x = 4$ là:

$$y = (m-1).(m+1) - m^2 - 2m \Leftrightarrow y = -2m-1$$

Suy ra $G(m+1; -2m-1)$.

b, Ta có $y = -2m-1 = -2(m+1)+1$. Mà $x = m+1$ nên $y = -2x+1$.

Tọa độ điểm G thỏa mãn phương trình đường thẳng $y = -2x+1$ cố định. Chứng tỏ G luôn thuộc đường thẳng $y = -2x+1$ cố định khi m thay đổi.

Câu 3.

a, Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó suy ra $(p-1)(p+1) : 8 \quad (1)$.

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1; p; p+1$. Ta có $(p-1)p(p+1) : 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra $(p-1)(p+1) : 3 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3; 8) = 1$ và $3.8 = 24$ ta suy ra $p^2 - 1 : 24 \quad (\text{đpcm})$.

b, Ta có $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương nên A có dạng:

$$A = n^2 + n + 6 = k^2, (k \in \mathbb{N}^*)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} n^2 + n + 6 = k^2 &\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 24 = 4k^2 \Leftrightarrow (2k)^2 - (2n+1)^2 = 23 \\ &\Leftrightarrow (2k+2n+1)(2k-2n-1) = 23 \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+2n+1 = 23 \\ 2k-2n-1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì 23 là số nguyên tố và $2k+2n+1 > 2k-2n-1$.

Ta có:

$$\begin{cases} 2k+2n+1 = 23 \\ 2k-2n-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 5 \end{cases}$$

Vậy với $n = 5$ thì A là số chính phương.

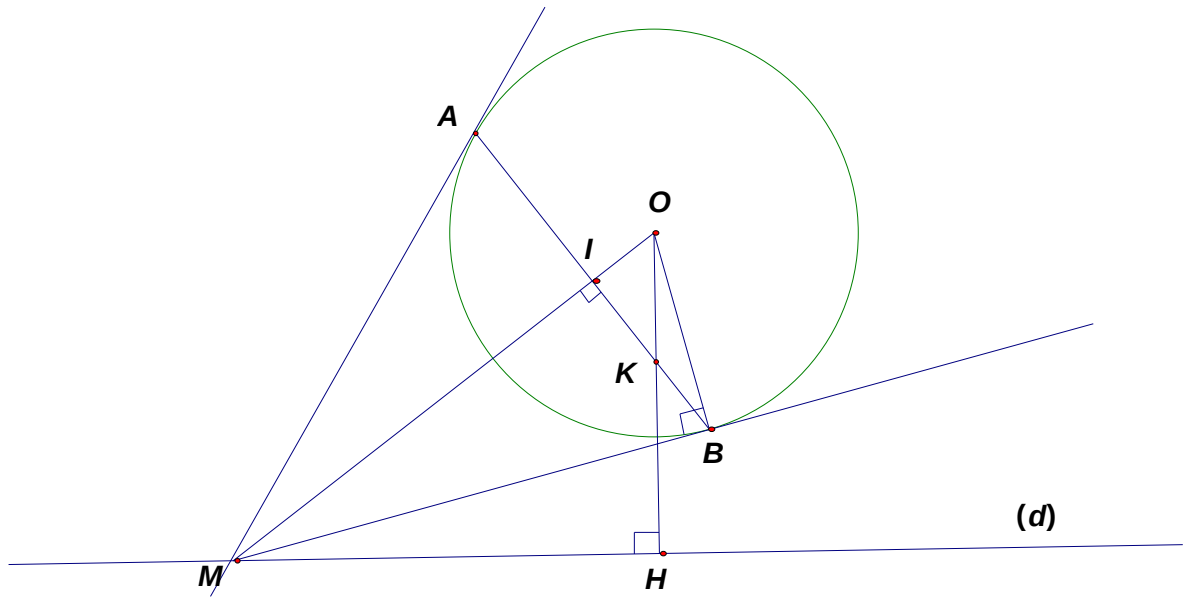
c, Ta có:

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2) \quad (*).$$

Vế trái của (*) là số chính phương; Vế phải của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0. Suy ra ta có: $\begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, y=1 \\ x=-2, y=2 \end{cases}$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$.

Câu 4.



Yêu cầu học sinh vẽ hình đúng đến câu a.

a, Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ nên $OB \perp MB$; $OA \perp MA$.

Dễ dàng chứng minh $\triangle OAM = \triangle OBM$ nên suy ra $MA = MB$.

Lại có $OA = OB$ nên OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

$OM \perp AB \Rightarrow \triangle OMB$ vuông tại B có BI là đường cao. Do đó:

$$OB^2 = OI \cdot OM \Rightarrow OI \cdot OM = R^2 \text{ không đổi. (đpcm)}$$

b, $\triangle AMB$ cân tại M (theo chứng minh trên)

Để $\triangle AMB$ đều thì góc $AMB = 60^\circ \Leftrightarrow$ góc $BMO = 30^\circ$.

$\Rightarrow \triangle OBM$ vuông tại B có $OB = 0,5OM$.

$$\Rightarrow OM = 2OB = 2R.$$

Kết luận: Vậy M là điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho $OM = 2R$.

c, Kẻ $OH \perp d$, $H \in d \Rightarrow H$ cố định, OH cắt AB tại K .

Ta có $\triangle OIK \sim \triangle OHM$ (g-g) nên $\Rightarrow OH \cdot OK = OI \cdot OM = R^2$ không đổi.

Mà O, H cố định nên OH không đổi $\Rightarrow OK$ không đổi $K \in OH$ cố định.

Vậy K cố định. (đpcm)

Câu 5. Ta có $x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(z + x)$.

Tương tự ta có $y + zx = (x + y)(y + z)$, $z + xy = (y + z)(z + x)$.

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương ta có:

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} = 8xyz$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} &= \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2[(x+y)(y+z)(z+x) + xyz]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= 2 + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq 2 + \frac{2xyz}{8xyz} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

(đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Đề số 33

Câu 1. a) Ta có $A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}.$$

b) Ta có: $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}} = \frac{2}{\frac{2}{(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{2}+1}+1)}} = \sqrt{2}.$ Thay

$x = \sqrt{2}$ vào biểu thức, ta được:

$$B = \left[1 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^4 \right]^{2018} = (1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 4)^{2018} = (-1)^{2018} = 1.$$

c) Ta có :

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right)^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 3x + 3 - 2\sqrt{2} = 6 + 3x.$$

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}} \right)^3 = 17 + 12\sqrt{2} + 3y + 17 - 12\sqrt{2} = 34 + 3y.$$

Cộng vế theo vế ta được: $x^3 + y^3 = 40 + 3x + 3y \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2018 = 2058.$

Vậy $C = 2058$ khi $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$

Câu 2. a) Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, theo đề, ta có $10a + b = kab$. (Trong đó: $1 \leq a, b \leq 9$ và $a, b, k \in \mathbb{Z}^+$).

$$\text{Suy ra } b = \frac{10}{\frac{ka-1}{a}} = \frac{10}{k - \frac{1}{a}}. \text{ Vì } 1 \leq b \leq 9 \Rightarrow 1 \leq \frac{10}{k - \frac{1}{a}} \leq 9 \Leftrightarrow \frac{10}{9} \leq k - \frac{1}{a} \leq 10.$$

$$\text{Từ } \begin{cases} \frac{10}{9} \leq k - \frac{1}{a} \leq 10 \\ 10 : k - \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow k - \frac{1}{a} \in \left\{ \frac{5}{3}; 2; \frac{5}{2}; 5; 10 \right\}.$$

$$\text{Nếu } k - \frac{1}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} a(3k-5)=3 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=\frac{8}{3} \end{cases} \text{ (không thỏa) hoặc } \begin{cases} a=3 \\ k=2 \end{cases} \text{ (thỏa)} \\ b=6$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 36.$$

$$\text{Nếu } k - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a(k-2)=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=3 \end{cases} \text{ (thỏa)} \Rightarrow \overline{ab} = 15.$$

$$\text{Nếu } k - \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=\frac{7}{2} \\ b=4 \end{cases} \text{ (không thỏa) hoặc } \begin{cases} a=2 \\ k=3 \end{cases} \text{ (thỏa)} \Rightarrow \overline{ab} = 24.$$

$$\text{Nếu } k - \frac{1}{a} = 5 \Rightarrow \begin{cases} a(k-5)=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=6 \end{cases} \text{ (thỏa)} \Rightarrow \overline{ab} = 12.$$

$$\text{Nếu } k - \frac{1}{a} = 10 \Rightarrow \begin{cases} a(k-10)=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=11 \end{cases} \text{ (thỏa)} \Rightarrow \overline{ab} = 11.$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} \in \{11; 12; 15; 24; 36\}.$$

b) Ta có

$$B = 1.2.3....n. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \right) (*) \text{ là số tự nhiên. Thật vậy:}$$

Với $n=1$ thì $B=1 \in \mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Với $n=2$ thì $B=3 \in \mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

$$\text{Giả sử } (*) \text{ đúng khi } n=k, \text{ nghĩa là } B = 1.2.3....k. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{N}.$$

Cần chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$, nghĩa là

$$B = 1.2.3....(k+1). \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{(k+1)} \right) \in \mathbb{N}.$$

Ta có:

$$B = 1.2.3....(k+1). \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{(k+1)} \right) = 1.2.3.... \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} \right) (k+1) + 1.2.3....k$$

$$\text{Có } \begin{cases} 1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right) \in \mathbb{N} \\ k+1 \in \mathbb{N} \\ 1.2.3.....k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow B \in \mathbb{N}.$$

Vậy $1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n=2k$ thì $1.2.3.....2k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.3.....k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)$ là các số tự nhiên.

Suy ra $\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)(k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right)$ và

$\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

Ta có $\begin{cases} 1011:3 \\ 1342:673 \end{cases} \Rightarrow 1010.1011.....1342.....2018:2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right).1010.1011.....1342.....2018:2019.$

Và $\begin{cases} 3:3 \\ 673:673 \end{cases} \Rightarrow 1.2.3....673.....1009:2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018:2019.$

Vậy số tự nhiên $A=1.2.3.....2017.2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Câu 3. a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$

Từ

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=4(ab+bc+ca)$$

.

Mà $ab+bc+ca=9$ nên $(a+b+c)^2=36 \xrightarrow{a,b,c>0} a+b+c=6.$

b) Ta có $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \Leftrightarrow (c-a-b)^2=4ab.$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c \geq a \geq b$. Khi đó, ta có:

$$(c-a-b)^2=4ab \geq 4b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c-a-b \geq 2b(1) \\ c-a-b \leq -2b(2) \end{cases}.$$

$$(1) \Rightarrow c - a - b > 0 \Rightarrow c > a + b$$

$$(2) \Rightarrow c - a - b \leq -2b \Leftrightarrow c - a + b \leq 0(*), \text{ mà } c - a \geq 0 \text{ suy ra } (*) \text{ vô lí.}$$

Vậy nếu $c \geq a, c \geq b$ thì $c \geq a + b$.

3.2 Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có các đánh giá sau:

$$x^{2019} + x^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2017 \text{ số } 1} \geq 2019x^2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x=1.$$

$$y^{2019} + y^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2017 \text{ số } 1} \geq 2019y^2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } y=1.$$

$$z^{2019} + z^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2017 \text{ số } 1} \geq 2019z^2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } z=1.$$

Khi đó:

$$6(x^{2019} + y^{2019} + z^{2019}) + 6051 \geq 2019(x^2 + y^2 + z^2) \xrightarrow{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 3} x^2 + y^2 + z^2 \leq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = y = z = 1$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có các đánh giá sau:

$$x^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{672 \text{ số } 1} \geq 673x^3; y^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{672 \text{ số } 1} \geq 673y^3 \text{ và}$$

$$z^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{672 \text{ số } 1} \geq 673z^3$$

$$x^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2018 \text{ số } 1} \geq 2019x; y^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2018 \text{ số } 1} \geq 2019y \text{ và}$$

$$z^{2019} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2018 \text{ số } 1} \geq 2019z$$

Khi đó:

$$+ x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} + 2016 \geq 673(x^3 + y^3 + z^3) \xrightarrow{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 3} x^3 + y^3 + z^3 \leq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

$$+ x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} + 6054 \geq 2019(x + y + z) \xrightarrow{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 3} x + y + z \leq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

$$\text{Suy ra } 6 \geq x^3 + x + y^3 + y + z^3 + z \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 2(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x^3 = x \\ y^3 = y \\ z^3 = z \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = y = z = 1$.

Cách 3. (Sử dụng BĐT HOLDER)

Áp dụng bất đẳng thức HOLDER, ta có

$$\begin{aligned} (x^{2019} + y^{2019} + z^{2019})(x^{2019} + y^{2019} + z^{2019})3^{2017} &\geq (x^2 + y^2 + z^2)^{2019} \\ \xrightarrow{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 3} 3^{2019} &\geq (x^2 + y^2 + z^2)^{2019} \rightarrow 3 \geq x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = y = z = 1$.

Câu 4. Vì $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{MB} = 1 - \frac{AN}{NC} \\ \frac{AN}{NC} = 1 - \frac{AM}{MB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AN}{NC} < 1 \\ \frac{AM}{MB} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a - x \\ y < a - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{a}{2} \\ y < \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow x + y < a.$

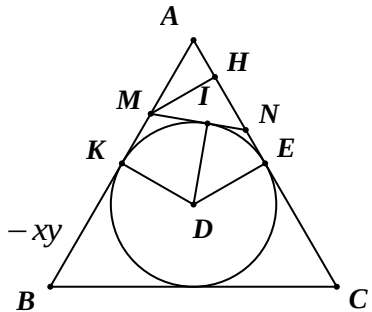
Không mất tính tổng quát ta giả sử $AM \leq AN$. Kẻ $MH \perp AC$ như hình vẽ bên.

Khi đó, ta có $AH = AM \cdot \cos 60 = \frac{AM}{2}$

a). Áp dụng định lý PYTAGO, ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= MH^2 + HN^2 = AM^2 - AH^2 + (AN - AH)^2 \\ &= AM^2 + AN^2 - 2AN \cdot AH = AM^2 + AN^2 - AM \cdot AN = x^2 + y^2 - xy \end{aligned}$$

Vậy $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy \quad (1)$



b). Theo đề ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1 &\Rightarrow \frac{AB}{MB} - 1 + \frac{AC}{NC} - 1 = 1 \\ \Rightarrow \frac{a}{a-x} + \frac{a}{a-y} = 3 &\Leftrightarrow a^2 - a(x+y) + a^2 = 3a^2 - 3a(x+y) + 3xy \Rightarrow a^2 - 2a(x+y) = -3xy \quad (2) \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$MN^2 = (x + y)^2 - 2a(x + y) + a^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = (a - x - y)^2$$

Vậy $MN = |a - x - y| = a - x - y$ (vì $x + y < a$).

c). Gọi K, E lần lượt là trung điểm của AB, AC .

D là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Kẻ $DI \perp MN$ ($I \in MN$). Khi đó ta dễ dàng tính được: $DK = DE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$MK = \frac{a}{2} - x; \quad NE = \frac{a}{2} - y.$$

Ta có $KM + NE = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - y = MN$ và $(2)ax + ay - 3xy = a(a - x - y)$.

$$S_{\triangle DMN} = 2S_{\triangle AKD} - S_{\triangle MKD} - S_{\triangle NED} - S_{\triangle AMN} = DK \cdot AK - \frac{KD \cdot MK}{2} - \frac{KE \cdot NE}{2} - \frac{AH \cdot AN}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= DK.AK - \frac{DK.MN}{2} - \frac{AH.AN}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} - \frac{a\sqrt{3}}{12}(a-x-y) - \frac{x\sqrt{3}y}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12} [a^2 - a(a-x-y) - 3xy] = \frac{\sqrt{3}}{12} [ay + ay - 3xy] = \frac{a\sqrt{3}}{12}(a-x-y) = \frac{DK.MN}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó $\frac{DI.MN}{2} = \frac{DK.MN}{2} \Rightarrow DI = DK$. Suy ra DI là bán kính đường tròn nội tiếp, mà $MN \perp DI \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn.

Câu 5. Gọi D là trung điểm của AC .

Ta chứng minh được $\triangle AHB \sim \triangle MOD$ (ba cặp cạnh song song)

$$\Rightarrow \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{MD} = 2 \Rightarrow HG = 2OG.$$

Gọi G là giao điểm của AM và OH . Ta chứng minh được

$$\Rightarrow \frac{AG}{GM} = \frac{HG}{GO} = \frac{AH}{OM} = 2 \Rightarrow AH = 2OM.$$

Dễ dàng chứng minh được tứ giác $OMKH$ là hình chữ nhật (hình bình hành có một góc vuông).

$$\Rightarrow HO = KM \Rightarrow HO = 4OM, \text{ suy ra } 3OG = 4OM.$$

Áp dụng định lý PYTAGO trong tam giác vuông OGM , ta có:

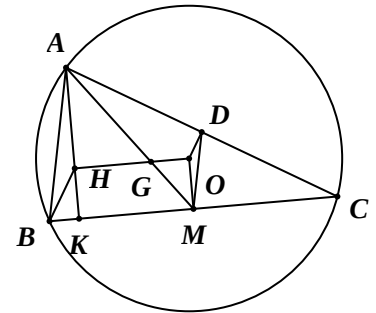
$$OM^2 + OG^2 = GM^2 \Leftrightarrow OM^2 + \frac{16}{9}OM^2 = \frac{AM^2}{9} \Leftrightarrow 5OM = AM \Rightarrow OM = 6 \text{ cm}.$$

Khi đó $OH = 24 \text{ cm}$; $AH = 12 \text{ cm}$; $AK = 18 \text{ cm}$.

Ta có $OC = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = 12\sqrt{5}$, từ đó tính được

$$BC = 2MC = 2\sqrt{OC^2 - OM^2} = 12\sqrt{9}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{AK.BC}{2} = \frac{18.112\sqrt{19}}{2} = 108\sqrt{19} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Đề số 34

Câu 1. a) Ta có $4x^2 + 8x = 38 - 6y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7-y^2)$.

Ta thấy: $2(x+1)^2 : 2 \Rightarrow (7-y^2) : 2 \Rightarrow y$ lẻ.

Mặt khác: $7-y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 7$. Do đó $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Khi đó $2(x+1)^2 = 18 \Rightarrow x+1 = \pm 3 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -4$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)\}$.

b) Ta có $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

Vì n là số tự nhiên nên $n^2 + 2n + 2 > 1$, mà $n^4 + 4$ là số nguyên tố nên $n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Câu 2. a) Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(x - \sqrt{x^2 + 2015})$ ta được:

$$-2015(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015(x - \sqrt{x^2 + 2015}) \quad (1)$$

Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(y - \sqrt{y^2 + 2015})$ ta được:

$$-2015(x + \sqrt{x^2 + 2015}) = 2015(y - \sqrt{y^2 + 2015}) \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được $x + y = 0$.

Vậy $A = x + y + 2016 = 2016$.

b) Đặt $ax^3 = by^3 = cz^3 = t$, ta có $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z}} = \sqrt[3]{t}$ (vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$)
(1).

Mặt khác $\sqrt[3]{t} = x\sqrt[3]{a} = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$. Suy ra $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{t} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[3]{t}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 3. a) Ta có $4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4}$ (1)

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + 2x + 2) - 2(x^2 - 2x + 2) = 11\sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} - 2 = 11\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} \quad (\text{do } x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x).$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}}$, ($t > 0$). Phương trình (1) trở thành $6t^2 - 11t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{1}{6} \end{cases}$.

Chọn $t = 2$, khi đó $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3} \right\}$.

b) Thay $y = 0$ vào hệ phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Với $y \neq 0$ ta có:

$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ y(x+y)^2 - 2(x^2 + 1) = 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2 + 1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}$, $v = x+y$

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{cases}$

- Với $v=3, u=1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$$

- Với $v=-5, u=9$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(1; 2); (-2; 5)\}$.

Câu 4. a) Ta có $\triangle ABE$ vuông tại E nên $\cos A = \frac{AE}{AB}$, $\triangle ACF$ vuông tại F nên $\cos A = \frac{AF}{AC}$.

Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c).

Khi đó $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$.

b) Tương tự câu a) ta có:

$$\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \cos^2 B, \quad \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \cos^2 C.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$$

Suy ra $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$.

c) Ta chứng minh được $OA \perp EF$; $OB \perp DF$; $OC \perp ED$.

Ta có $2S_{ABC} = 2(S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE}) \Rightarrow BC \cdot AD = OA \cdot EF + OB \cdot FD + OC \cdot ED$

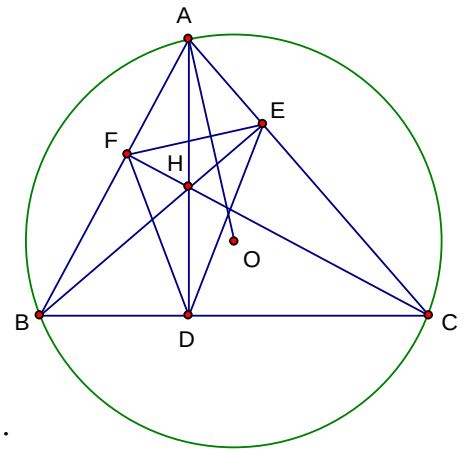
$$\Rightarrow BC \cdot AD = R(EF + FD + ED) \Rightarrow EF + FD + ED = \frac{BC \cdot AD}{R}.$$

Chu vi $\triangle DEF$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung lớn BC .

Câu 5. Ta có $P \geq \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} + \frac{2ab}{c^2+ab} + \frac{2bc}{a^2+bc} + \frac{2ca}{b^2+ca}$.

Mà $\frac{a^2}{2bc} = \frac{a^2+bc}{2bc} - \frac{1}{2}$, $\frac{b^2}{2ca} = \frac{b^2+ca}{2ca} - \frac{1}{2}$, $\frac{c^2}{2ab} = \frac{c^2+ab}{2ab} - \frac{1}{2}$.

Suy ra $P \geq \left(\frac{a^2+bc}{2bc} + \frac{2bc}{a^2+bc}\right) + \left(\frac{b^2+ca}{2ca} + \frac{2ca}{b^2+ca}\right) + \left(\frac{c^2+ab}{2ab} + \frac{2ab}{c^2+ab}\right) - \frac{3}{2}$



$$\geq 2+2+2-\frac{3}{2}=\frac{9}{2} \text{ (Vì với } x, y > 0, \text{ áp dụng BĐT Cosi ta được } \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy GTNN của P bằng $\frac{9}{2}$ đạt được khi $a=b=c$.

Đề số 35

Câu 1. 1a) ĐK: $x \geq 0; x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2x-6\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-x+16\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } P &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \\ &\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

Vậy $\text{Min}P = 4$ khi $x = 4$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Từ } a &= \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \Rightarrow a^3 = 4 + 3a \Rightarrow a^3 - 3a = 4 \\ &\Rightarrow \frac{4}{a^2-3} = a \Rightarrow \frac{64}{(a^2-3)^3} = a^3 \\ &\Rightarrow \frac{64}{(a^2-3)^3} - 3a = a^3 - 3a = 4. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{64}{(a^2-3)^3} - 3a$ là số nguyên.

Câu 2.

1. ĐKXĐ: $x \geq 1$ (*)

$$\text{Ta có: } x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 (KTM) \\ y = 3 (TM) \end{cases}$$

Với $y = 3$ ta có pt

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x-1} = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

2. Nhà toán học De Morgan sinh năm 1806, ông x tuổi vào năm x^2 nên ta có:

$$x^2 - x = 1806 \quad (x \in \mathbb{N}^*)$$

$$x(x-1) = 42.43 \text{ mà } x \text{ và } x-1 \text{ là hai số tự nhiên liên tiếp nên } x = 43 \Rightarrow x^2 = 1849$$

Vậy năm 1849 ông De Morgan 43 tuổi.

3. Nếu mệnh đề b) đúng thì $A + 51$ có chữ số tận cùng là 2 và $A - 38$ có chữ số tận cùng là 3 nên cả hai số này đều không là số chính phương. Vậy mệnh đề b) sai và các mệnh đề a) và c) đúng.

$$\text{Giả sử } A+51 = m^2; A-38 = n^2 \quad (m, n \in \mathbb{N}; m > n)$$

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = 89 \text{ hay } (m-n)(m+n) = 89$$

Vì 89 là số nguyên tố nên $m+n = 89$ và $m-n = 1 \Rightarrow m = 45$ và $n = 44$ nên $A = 1974$.

Câu 3.

$$\text{a) Ta có: } 2x^2 + 4x - 3y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3y^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } x^2 y^2 + 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{-2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{2|x|}{2|x|.1} = 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $y = 1 \Rightarrow x = -1$. Vậy $x = -1$ và $y = 1$.

$$\text{b) Phương trình } x^2 y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow xy(x+1) = 2x^2 + 3x - 4$$

$$\text{Vì } x = -1 \text{ không là nghiệm nên ta có } xy = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x+1} = 2x + 1 - \frac{5}{x+1}$$

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } (x+1) \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{0; -2; 4; -6\}$$

$$x = 0 \text{ (loại); } x = -2 \Rightarrow y = -1; x = 4 \Rightarrow y = 2; x = -6 \Rightarrow y = \frac{10}{6} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $(-2; -1); (4; 2)$

Câu 4.

1a) Vẽ hình đúng đến câu a)

C/m tam giác AKC đồng dạng với tam

giác AIB suy ra $\frac{AK}{AC} = \frac{AI}{AB}$

C/m tam giác AKI đồng dạng với tam
giác ACB (cgc)

$$b) \frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AI \cdot AK}{AB \cdot AC} = \cos^2 A$$

$$\text{Tương tự } \frac{S_{BHK}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$$

$$\frac{S_{CHI}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$$

Mà $S_{AKI} = S_{BKH} = S_{CHI}$ nên $\cos^2 A = \cos^2 B = \cos^2 C \Rightarrow A = B = C$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

2. Vẽ hình đúng

Vẽ đường kính AK của đường tròn
(O;R)

$$C/m \quad AN \cdot AC = AH^2 = 2R^2$$

$$\Rightarrow AN \cdot AC = R \cdot 2R = AO \cdot AK$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AO} = \frac{AK}{AC}$$

$$C/m \quad \triangle NAO \sim \triangle KAC \quad (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle AON = \angle ACK$$

$$C/m \quad \angle ACK = 90^\circ \Rightarrow \angle AON = \angle ACK = 90^\circ$$

C/m tương tự

$$\angle AOM = 90^\circ \Rightarrow \angle AON + \angle AOM = 180^\circ$$

nên ba điểm M, O, N thẳng hàng.

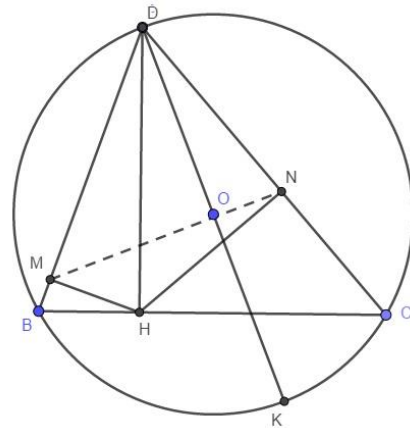
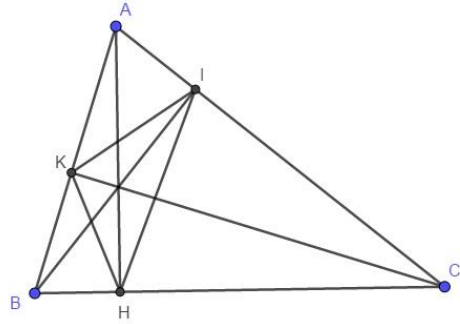
Câu 5. Vì $x + y + z = 1$ nên $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) = (y + z)(2x + y + z)$

$$x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(x + z)$$

Đặt $a = x + y, b = y + z, c = z + x$, với $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 2$.

$$\text{Khi đó: } \frac{1 - x^2}{x + yz} = \frac{(y + z)(2x + y + z)}{(x + y)(x + z)} = \frac{b(a + c)}{ac} = \frac{b}{c} + \frac{b}{a}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{1 - y^2}{y + xz} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \quad \text{và} \quad \frac{1 - z^2}{z + xy} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$



$$\frac{1-x^2}{x+yz} + \frac{1-y^2}{y+xz} + \frac{1-z^2}{z+xy} = \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq 6$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$ (Trái với giả thiết)

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Đề số 36

Câu 1. a) Điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \\ \sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$P = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}(1+a-1)}{\sqrt{a}} = 4a$$

Vậy $P = 4a$.

$$\text{b) } a = \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3}-1)$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3}-1) = \sqrt{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{(2+\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2}.$$

Vậy $a = \sqrt{2}$ do đó $P = 4a = 4\sqrt{2}$.

Câu 2. Điều kiện $x \geq 1$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| - \sqrt{x-1} = 1 \quad (1)$$

Khi $\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$: Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}=1. \text{ Phương trình vô nghiệm}$$

Khi $0 \leq \sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$: Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3. a) Vì $x > 0, y > 0$ nên $\frac{x}{y} > 0$ và $\frac{y}{x} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$

Vậy $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ (vì $x > 0, y > 0$)

b) Đặt $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, ta có $M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a}$

Vì $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $\frac{3a}{4} \geq \frac{3}{2}$;

Ta có $\frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Do đó $M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$; $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$.

Câu 4. a) Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường

kinh AB nên $FMK = 90^\circ$ và $FEK = 90^\circ$.

Vậy 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên đường tròn đường kính FK .

b) Ta có $\triangle HAK$ cân tại A nên $AH = AK$ (1)

K là trực tâm của $\triangle AFB$ nên ta có $FK \perp AB$

Suy ra $FK \parallel AH$ (2)

Do đó $FAH = AFK$ mà $FAH = FAK$ (gt) cho nên

$AFK = FAK$

Suy ra $AK = KF$, kết hợp với (1) ta được $AH = KF$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $AKFH$ là hình bình hành nên $HF \parallel AK$. Mà $AK \perp IB$ suy ra $HF \perp IB$.

c) Chu vi của $\triangle AMB = C_{\triangle AMB} = MA + MB + AB$ lớn nhất khi chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất (vì AB không đổi).

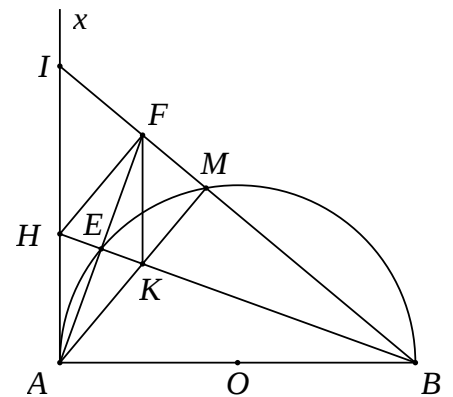
Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$, ta có

$(MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 2AB^2$

Nên $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AB\sqrt{2}$ khi và chỉ khi

$MA = MB$ hay M nằm chính giữa cung AB .

Vậy khi M nằm chính giữa cung AB thì $C_{\triangle AMB}$ đạt giá trị lớn nhất.



Khi đó

$$C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB = AB\sqrt{2} + AB = (1 + \sqrt{2})AB = 2R(1 + \sqrt{2})$$

Câu 5. Đặt $A = (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4)$, ta có $2^x \cdot A$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên $2^x \cdot A$ chia hết cho 5. Nhưng 2^x không chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5.

Nếu $y \geq 1$, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y \geq 1$ không thỏa mãn, suy ra $y = 0$.

Khi đó, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 1 = 11879$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 11880$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3; y = 0$ là hai giá trị cần tìm.

Đề số 37

Câu 1.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1} = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)^2 \end{aligned}$$

c) Với ĐK: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } A = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$\text{Vì } A = (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1 \text{ với mọi } x \geq 0 \text{ nên } 0 < \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \leq 2$$

$$\text{Do đó: } \frac{2}{A} = \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \in \mathbb{N} \text{ khi } (\sqrt{x} + 1)^2 = 1 \text{ hoặc } (\sqrt{x} + 1)^2 = 2$$

$$\text{Mà } \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ nên } \sqrt{x} + 1 = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x} + 1 = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } x = 0 \text{ hoặc } x = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{2}{A} \text{ là số tự nhiên khi } x = 0 \text{ hoặc } x = 3 - 2\sqrt{2}$$

Câu 2.

a) PT: $\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x^2 - 8x + 24}$ (1)

ĐKXĐ: $2 \leq x \leq 6$

Chứng minh được: $\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} \leq 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-2 = 6-x \Leftrightarrow x = 4$

$$\sqrt{x^2 - 8x + 24} = \sqrt{(x-4)^2 + 8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Phương trình (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$

Giá trị $x = 4$ (TM ĐKXĐ) Vậy: $S = \{4\}$

b) Giải hệ:
$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 & (1) \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2): $(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5$ thay vào (1) $\Rightarrow xy = 12$

Từ đó ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 7 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ pt:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x, y) \in \{(4; 3), (3; 4), (-3; -4), (-4; -3)\}$

Câu 3.

a) Thay $y = 2x + 3$ vào đẳng thức, được: $x^2 + (2x + 3)^2 - 2x(2x + 3) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1 (\Rightarrow y = 1), x = -5 (\Rightarrow y = -7)$.

Những điểm có tọa độ thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$ là $(-1; 1)$ và $(-5; -7)$

b) * (d') vuông góc với (d) nên có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + b$.

(d') qua $A(-1; 1) \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Vậy (d'): $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

* (d'') có dạng $y = ax + b$

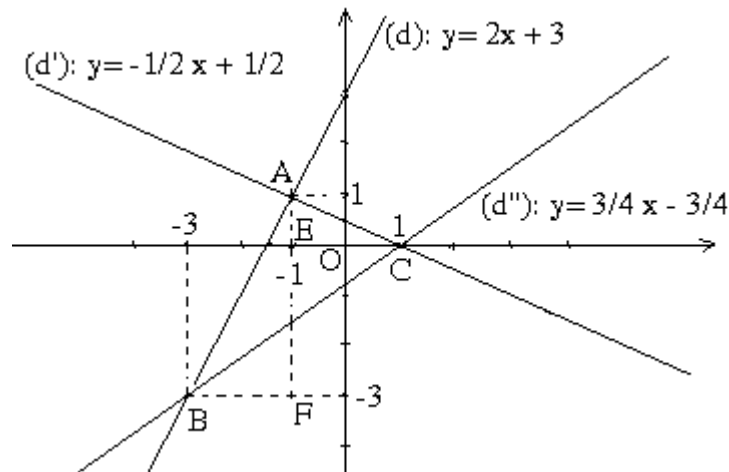
(d'') đi qua điểm $B(-3; -3) \Rightarrow -3 = a(-3) + b \Rightarrow -3a + b = -3$

(d'') đi qua $C(1; 0) \Rightarrow 0 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -3a + b = -3 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta tìm được: $a = \frac{3}{4}, b = -\frac{3}{4}$.

Vậy (d'') : $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.



c) (d') đi qua $C(1; 0)$ vì khi thay toạ độ C vào (d') ta được đẳng thức đúng

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}.$$

Tam giác ABC là tam giác được tạo bởi các đường thẳng (d) , (d') và (d'') .

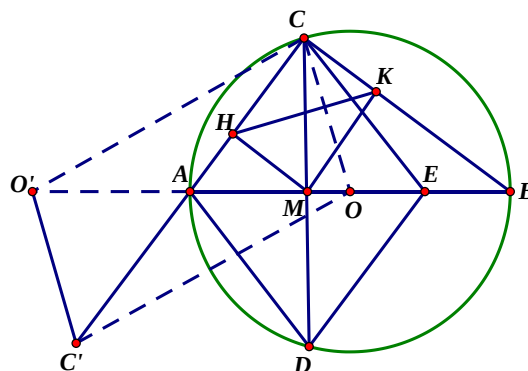
Ta có: $AE = 1$; $EC = 2$. Từ tam giác vuông AEC ta được

$$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{5}.$$

$AF = 4$; $BF = 2$. Từ tam giác vuông ABF ta được $AB = \sqrt{AF^2 + FB^2} = 2\sqrt{5}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ (đvdt).

Câu 4.



a) Vì $CD \perp AB \Rightarrow CM = MD$

Tứ giác $ACED$ có AE cắt CD tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Mà $AE \perp CD \Rightarrow$ tứ giác $ACED$ là hình thoi.

b) Vì tam giác ABC có AB là đường kính (O) nên tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow$ tứ giác $CHMK$ là hình chữ nhật

Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông AMC ta có:

$$MH \cdot AC = MA \cdot MC \Rightarrow MH = \frac{MA \cdot MC}{AC}$$

$$\text{tương tự ta có: } MK = \frac{MB \cdot MC}{BC}$$

$$\Rightarrow MH \cdot MK = \frac{MA \cdot MB \cdot MC^2}{AC \cdot BC}$$

mà $MA \cdot MB = MC^2$, $AC \cdot BC = MC \cdot AB$ (do tam giác ABC vuông tại C)

$$\Rightarrow MH \cdot MK = \frac{MC^2 \cdot MC^2}{MC \cdot AB} = \frac{MC^3}{AB} \Rightarrow \frac{MH \cdot MK}{MC^2} = \frac{MC}{AB}$$

Mà $MC = HK$ (do CMHK là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow \frac{MH \cdot MK}{HK \cdot MC} = \frac{MC}{AB} = \frac{2MC}{2AB} = \frac{CD}{4R} \quad \text{Vậy: } \frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R}$$

c) Lấy O' đối xứng với O qua A suy ra O' cố định.

Tứ giác $COC'O'$ là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm A của mỗi đường.

Do đó $O'C' = OC = R$ không đổi

Suy ra C' nằm trên đường tròn (O', R) cố định khi M di chuyển trên đường kính AB .

Đề số 38

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } x^2 + 6xy + 5y^2 - 5y - x &= x^2 + 5xy + xy + 5y^2 - 5y - x \\ &= x(x + 5y) + y(x + 5y) - (x + 5y) = (x + 5y)(x + y - 1). \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow (a^3 - 3ab^2)^2 = 25 \Leftrightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \quad (1)$$

$$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow (b^3 - 3a^2b)^2 = 100 \Leftrightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) vế theo vế ta được:

$$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 125 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5$$

$$\text{Do đó: } S = 2018(a^2 + b^2) = 2018 \cdot 5 = 10090.$$

$$\text{c) } A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(\frac{x^2-4+10-x^2}{x+2} \right) = \left(\frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(\frac{6}{x+2} \right)$$

$$= \left(\frac{x-2(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)} \right) : \frac{6}{x+2} = \left(\frac{x-2x-4+x-2}{(x-2)(x+2)} \right) : \frac{6}{x+2} = \frac{-6}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2} = \frac{-1}{x-2}$$

$$\text{Với } A > 0 \Rightarrow \frac{-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Vậy, $x < 2$, $x \neq 0$, $x \neq -2$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2. a) Vì n là số nguyên không chia hết cho 3 nên $n = 3k+1$ hoặc $n = 3k+2$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{- Xét } n = 3k+1 \text{ ta có: } 3^{2n} = 3^{2(3k+1)} = 3^{6k} \cdot 3^2 = (3^3)^{2k} \cdot 9 = 27^{2k} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$3^n = 3^{3k+1} = 3^{3k} \cdot 3 = (3^3)^k \cdot 3 = 27^k \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}.$$

$$\text{Suy ra: } P = 3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 9 + 3 + 1 = 13 \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$\text{- Xét } n = 3k+2 \text{ ta có: } 3^{2n} = 3^{2(3k+2)} = 3^{6k} \cdot 3^4 = (3^3)^{2k} \cdot 81 = 27^{2k} \cdot 81 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$3^n = 3^{3k+2} = 3^{3k} \cdot 3^2 = (3^3)^k \cdot 9 = 27^k \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}.$$

$$\text{Suy ra: } P = 3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3 + 9 + 1 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy, với n là số nguyên không chia hết cho 3 thì $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

b) Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2 + n + 503 = m^2$.

Vì: n là số hữu tỉ nên tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ sao cho $n = \frac{a}{b}$ và $(a; b) = 1$

$$\text{Ta có: } n^2 + n + 503 = m^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{a}{b} + 503 = m^2 \Leftrightarrow a^2 + ab + 503b^2 = m^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -b(a + 503b - m^2 b^2) \Rightarrow a^2 : b$$

Mà $(a; b) = 1$ nên $b = 1$ hay $b = a \in \mathbb{Z}$

$$\text{Do đó: } n^2 + n + 503 = m^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 2012 = 4m^2 \Leftrightarrow 4m^2 - (2n+1)^2 = 2011$$

$$\Leftrightarrow (2m - 2n - 1)(2m + 2n + 1) = 2011$$

$$\text{Vì: } (2m - 2n - 1) + (2m + 2n + 1) = 4m > 0.$$

Ta có các trường hợp sau:

$$\text{- Trường hợp 1: } \begin{cases} 2m - 2n - 1 = 1 \\ 2m + 2n + 1 = 2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 503 \\ n = 502 \end{cases}$$

$$\text{- Trường hợp 2: } \begin{cases} 2m - 2n - 1 = 2011 \\ 2m + 2n + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 503 \\ n = -503 \end{cases}$$

Vậy, $n = 502$; $n = -503$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3. a) Ta có: $(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1) = 330 \Leftrightarrow (36x^2 - 15x + 1)(24x^2 - 10x + 1) = 330$

$$\Leftrightarrow [3(12x^2 - 5x) + 1][2(12x^2 - 5x) + 1] = 330$$

Đặt: $y = 12x^2 - 5x$.

Ta có: $(3y+1)(2y+1) = 330 \Leftrightarrow 6y^2 + 5y + 1 = 330 \Leftrightarrow 6y^2 + 5y - 329 = 0$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 42y + 47y - 329 = 0 \Leftrightarrow 6y(y-7) + 47(y-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-7)(6y+47) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = -\frac{47}{6} \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$, do đó $y = 7$.

Ta có:

$$12x^2 - 5x = 7 \Leftrightarrow 12x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 7x - 7 = 0 \Leftrightarrow 12x(x-1) + 7(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(12x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{12} \end{cases}$$

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$ thỏa mãn bài toán.

b) Giải phương trình: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

- Xét $x < 2$ ta có phương trình: $-(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow -(x^2-4)(x^2-1) = 4$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0, \text{ (vô nghiệm).}$$

- Xét $x \geq 2$ ta có phương trình: $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 4$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$ ta được nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{5}$.

c) Ta có: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = x^2 + 3x + 2$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = x^2 + x + 2x + 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = x(x+1) + 2(x+1) \Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2)$$

Nhận thấy $x+1$ và $x+2$ là hai số nguyên liên tiếp nên tích $(x+1)(x+2)$ là số chính

$$\text{phương khi: } (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Với $x = -1 \Rightarrow y = 1$.

- Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$

Vậy, các cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn bài toán là: $(-1; 1)$ và $(-2; 2)$

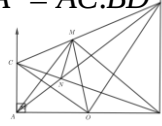
Câu 4.

a) Ta có: $\angle ACO = \angle BOD = 90^\circ - \angle AOC$

$$\angle AOC = \angle BDO = 90^\circ - \angle BOD$$

Suy ra:

$$\triangle ACO \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{OA}{BD} = \frac{AC}{OB} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow OA^2 = AC \cdot BD$$



b) Ta có:

$$\triangle ACO \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{AC}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{AC}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OD}$$

Lại có: $\angle CAO = \angle COD = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle OCD \Rightarrow \angle ACO = \angle OCD$

Suy ra: Hai tam giác vuông CAO và CMO bằng nhau.

Do đó: $OM = OA = OB$ nên tam giác AMB vuông tại M.

c) Ta có hai tam giác vuông CAO và CMO bằng nhau nên $CA = CM$.

Chứng minh tương tự câu b) ta cũng có hai tam giác vuông DBO và DMO bằng nhau nên $DB = DM$.

Áp dụng hệ quả của định lý Talets ta có: $\frac{DB}{CA} = \frac{DN}{NA} \Rightarrow \frac{DM}{CM} = \frac{DN}{NA} \Rightarrow MN \parallel AC$.

Câu 5.

Ta có: Bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{a^2(b+c)} + \frac{abc}{b^2(c+a)} + \frac{abc}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{bc}{ab+ca} + \frac{ac}{bc+ab} + \frac{ab}{ca+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{ab+ca} + 1 + \frac{ca}{bc+ab} + 1 + \frac{ab}{ca+bc} + 1 \geq \frac{3}{2} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ac) \left(\frac{1}{ab+ca} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ca+bc} \right) \geq 9 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2(ab+bc+ac) = ab+bc+bc+ca+ca+ab \geq 3\sqrt{(ab+bc)(bc+ca)(ca+ab)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{ab+ca} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ca+bc} \geq 3\sqrt{\frac{1}{ab+ca} \cdot \frac{1}{bc+ab} \cdot \frac{1}{ca+bc}} \quad (2)$$

Nhân theo vế (1) với (2) ta được bất đẳng thức (*).

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi : } \begin{cases} ab = bc \\ bc = ca \\ ca = ab \\ abc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Câu 1.

a) Với $0 < x \neq 1$, ta có

$$P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

b) Ta có

$$Q = P - 9\sqrt{x} + 2019 = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 2019$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1 - 9x}{\sqrt{x}} + 2019 = \frac{-(9x - 6\sqrt{x} + 1) - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 2019$$

$$= \frac{-(3\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} - 5 + 2019 = 2014 - \frac{(3\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} \leq 2014 \quad (\forall x > 0).$$

$$\text{Vậy } \max Q = 2014 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Câu 2.

a) Điều kiện: $\begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x} - 1)^2 - \sqrt{(7 - x)(x - 1)} + 4(\sqrt{7 - x} - \sqrt{x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1 - \sqrt{7 - x}) + 4(\sqrt{7 - x} - \sqrt{x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1 - \sqrt{7 - x})(\sqrt{x} - 1 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = \sqrt{7 - x} \\ \sqrt{x} - 1 = 4 \end{cases}$$

• $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{7 - x} \Leftrightarrow x - 1 = 7 - x \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

• $\sqrt{x} - 1 = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 4$.

b) Biến đổi vế trái của bất đẳng thức, ta có:

$$VT = \frac{(a - b)^3}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}$$

$$= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{b - a} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b - a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3 - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3} + \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \\
&= \frac{3\sqrt{a}(a + \sqrt{ab} + b)}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \\
&= \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = 0 \leq \frac{1}{3abc}.
\end{aligned}$$

Câu 3. Do $abc > 0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{abc}{a^3 + 8abc} + \frac{abc}{b^3 + 8abc} + \frac{abc}{c^3 + 8abc} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a^2}{bc} + 8} + \frac{1}{\frac{b^2}{ac} + 8} + \frac{1}{\frac{c^2}{ab} + 8} \leq \frac{1}{3} \quad (1)$$

Đặt $x = \frac{a^2}{bc}$, $y = \frac{b^2}{ac}$, $z = \frac{c^2}{ab}$ với $xyz = 1$

Bất đẳng thức (1) trở thành $\frac{1}{x+8} + \frac{1}{y+8} + \frac{1}{z+8} \leq \frac{1}{3} \quad (2)$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (2),

Ta có (2) $\Leftrightarrow 3[(xy + yz + zx) + 16(x + y + z) + 192] \leq xyz + 8(x + y + z) + 512$

$\Leftrightarrow 5(xy + yz + zx) + 16(x + y + z) \geq 63$ (do $xyz = 1$) (3)

Áp dụng BĐT AG-GM, ta có $xy + yz + zx \geq 3\sqrt{(xyz)^2} = 3$ và $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$

Do đó ta chứng minh xong bất đẳng thức (3)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hay $a = b = c$.

Câu 4.

a) Giả sử $\begin{cases} n - 50 = a^2 \\ n + 50 = b^2 \end{cases}$ với a, b nguyên dương và $a < b$.

Suy ra $b^2 - a^2 = 100 \Leftrightarrow (b - a)(a + b) = 2^2 \cdot 5^2$

Do $b - a < a + b$ và chúng có cùng tính chẵn, lẻ nên $b - a$ và $a + b$ phải là các số chẵn.

Do đó $\begin{cases} b - a = 2 \\ a + b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 26 \end{cases}$

Vậy $n = 626$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $(2, q) = 1 \Rightarrow 8q = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ (1)

Do $p^2 = 8q + 1$ nên p^2 lẻ suy ra p lẻ, tức là $p = 2k + 1$

Thay vào (1) ta được $8q = 2k(2k + 2) \Leftrightarrow 2q = k(k + 1)$ (2)

Nếu $q = 2$ thì $k(k+1) = 4$, không thể tìm được $k \in \mathbb{N}$.

Do đó $q > 2$,

Vì q là số nguyên tố nên $(2, q) = 1$. Từ (2), ta có

• $k = 2$ và $q = k+1$ ta suy ra $k = 2, q = 3$. Thay vào (1), ta được $p = 5$.

• $k = q$ và $k+1 = 3$ nên $q = 1$ (loại).

Vậy $(p; q) = (5; 3)$ là cặp số cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5.

a) Ta có

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OH : \sin OBH}{OK : \sin OCK} \text{ (do } \triangle OBH, \triangle OCK \text{ lần lượt vuông góc tại } H, K)$$

$$= \frac{OH}{OK} \text{ (do } \angle ABO = \angle ACO)$$

$$= \frac{OA : \sin OAH}{OA : \sin OAK} \text{ (do } \triangle OAH, \triangle OAK \text{ lần lượt vuông góc tại } H, K)$$

$\triangle OAH$ lần lượt vuông góc tại H, K)

$$= \frac{\sin OAB}{\sin OAC} \text{ hay } OB \cdot \sin OAC = OC \cdot \sin OAB.$$

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OB, OC .

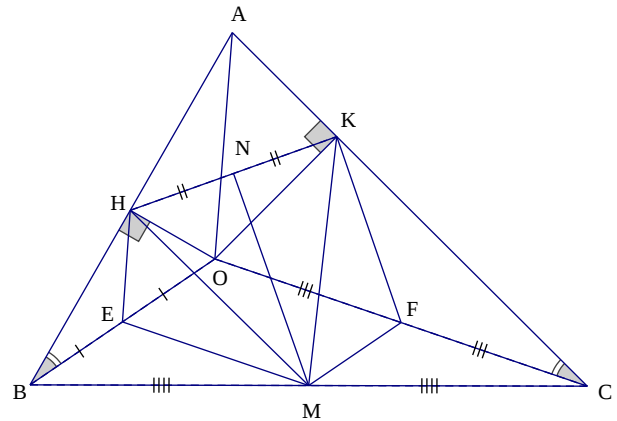
Do $MEOF$ là hình bình hành nên $MEO = MFO$ (1)

Ta có $OEH = 2\angle ABO = 2\angle ACO = OFK$ (2)

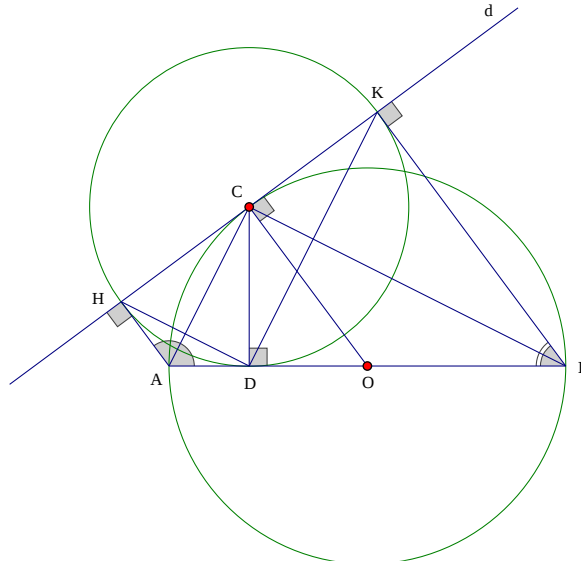
Từ (1) và (2) suy ra $MEH = MFK$.

Lại có $ME = OF = FK$; $EH = EO = MF$ nên $\triangle MEH = \triangle MFK$ (c.g.c).

Suy ra $MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại $M \Rightarrow MN \perp HK$.



Câu 6.



a) Do C nằm trên đường tròn đường kính AB nên $ACB = 90^\circ$.

Do d là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C nên $OCK = 90^\circ$.

Khi đó

$$ACO + OCB = OCB + BCK = 90^\circ \Rightarrow ACO = BCK \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle OCA$ cân tại $O \Rightarrow ACO = CAO$;

(2)

$$\triangle ACB \text{ vuông và } \Rightarrow CAO = DCB.$$

(3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $DCB = BCK$.

Điều này dẫn đến $\triangle BCD = \triangle BCK \Rightarrow BK = BD$.

Tương tự $AH = AD$.

Suy ra $AH + BK = AD + BD \Rightarrow AH + BK = AB$.

Vậy $AH + BK$ không đổi khi tiếp tuyến d thay đổi trên đường tròn (O) .

b) $\triangle BCD = \triangle BCK$ (chứng minh ở câu a) $\Rightarrow CD = CK$.

Tương tự $\triangle CHA = \triangle CDA \Rightarrow CD = CH$.

Suy ra $CH = CK$ hay C là trung điểm của HK .

Đường tròn đường kính HK có $AH \perp HK$, $BK \perp HK$, $AB \perp CD$ nên đường tròn đó luôn tiếp xúc với AK , BK và AB .

c) Do tứ giác $AHKB$ có $AH \perp HK$, $BK \perp HK$ nên nó là hình thang vuông.

Do $AH + BK = AB$ nên

$$S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AH + BK)HK = \frac{1}{2}AB.HK = OC.HK$$

Do $HK \leq AB$ nên $S_{AHKB} \leq OC.AB = OC.2OC = 2OC^2$.

Khi đó S_{AHKB} lớn nhất $\Leftrightarrow HK = AB \Leftrightarrow$ tứ giác $AHKB$ là hình chữ nhật
 $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa AB .

Đề số 40

Câu 1.

a. Ta có:
$$\begin{cases} n + 24 = k^2 \\ n - 65 = h^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 24 = h^2 + 65$$

$$\Leftrightarrow (k - h)(k + h) = 89 = 1.89$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k + h = 89 \\ k - h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 45 \\ h = 44 \end{cases}$$

Vậy: $n = 45^2 - 24 = 2001$

b. Với $n = 0$ ta có $A(0) = 19 : 19$

Giả sử A chia hết cho 19 với $n = k$ nghĩa là: $A(k) = 7.5^{2k} + 12.6^k : 19$

Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với $n = k + 1$ nghĩa là phải chứng minh:

$$A(k+1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1} : 19$$

Ta có: $A(k+1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1} : 19$

$$\begin{aligned} & 7.5^{2k}.5^2 + 12.6^k.6 \\ &= 7.5^{2k}.6 + 7.5^{2k}.19 + 12.6^k.6 \\ &= 8.A(k) + 7.5^{2k}.19 : 19 \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n

Câu 2.

a) ĐKXD $x, y, z \geq 0$. Kết hợp $xyz = 4 \Rightarrow x, y, z > 0; \sqrt{xyz} = 2$

Nhân cả tử và mẫu của hạng tử thứ hai với $\sqrt{x}$, thay 2 ở mẫu của hạng tử thứ ba bởi $\sqrt{xyz}$ ta được.

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{xy}}{2 + \sqrt{xy} + \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z}(\sqrt{x} + 2 + \sqrt{xy})} = 1$$

Suy ra $\sqrt{A} = 1$ (vì $A > 0$).

b) Từ: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$

Ta có: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$

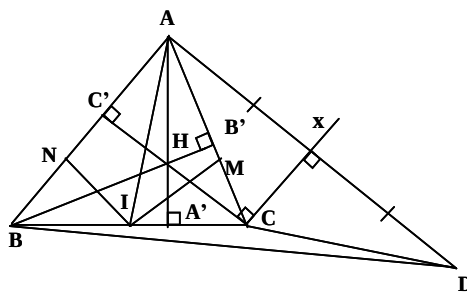
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (dpcm)}$$

Điều kiện: $x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1} + 3 \right) \left(\frac{x^2}{x+1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} + 3 = 0 \\ \frac{x^2}{x+1} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+) \frac{x^2}{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 4.



Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}.$

$$\text{Do đó: } \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

- Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC$, $AD = 2CC'$

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

- $\triangle BAD$ vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

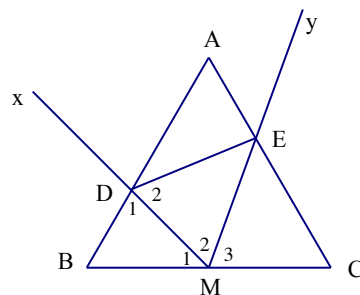
$$\text{Tương tự: } 4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2; \quad 4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

- Chứng minh được: $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi $BC = AC$, $AC = AB$, $AB = BC$ hay $\triangle ABC$ đều

2)



a) Trong tam giác BDM ta có: $D_1 = 120^\circ - M_1$

$$\text{Vì } M_2 = 60^\circ \text{ nên ta có: } \hat{M}_3 = 120^\circ - \hat{M}_1$$

$$\text{Suy ra } D_1 = M_3$$

Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (1)

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}, \text{ từ đó: } BD \cdot CE = BM \cdot CM$$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Từ (1) suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$ mà $BM = CM$ nên ta có: $\frac{BD}{BM} = \frac{MD}{EM}$

Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED$

Từ đó suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$, do đó DM là tia phân giác góc BDE

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác góc CED

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE,

Chứng minh $DH = DI$, $EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng $2AH$.

Câu 5.

Đặt $x = 3a + b + c$; $y = 3b + a + c$; $z = 3c + b + a$

$$\Rightarrow x + y + z = 5(a + b + c) = 5(x - 2a) = 5(y - 2b) = 5(z - 2c)$$

$$\Rightarrow 4x - (y + z) = 10a; 4y - (x + z) = 10b; 4z - (y + x) = 10c;$$

$$\Rightarrow 10T = \frac{4x - (y + z)}{x} + \frac{4y - (x + z)}{y} + \frac{4z - (x + y)}{z}$$

$$= 12 - \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right) \leq 12 - 6 = 6$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{3}{5}$$

Đề số 41

Câu 1.

1) Ta có:

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(x - 4\sqrt{x} + 3)(2 - \sqrt{x})} - \frac{3}{-2x + 10\sqrt{x} - 12} - \frac{1}{3\sqrt{x} - x - 2}$$

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{3}{2(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})} - \frac{1}{(2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1)}$$

Do $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$; $x \neq 9$

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3 - 3(\sqrt{x} - 1) - 2(\sqrt{x} - 3)}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})}$$

$$A = \frac{6x - x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3 - 3\sqrt{x} + 3 - 2\sqrt{x} + 6}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})}$$

$$A = \frac{(2x-6\sqrt{x})-2(\sqrt{x}-3)-x(\sqrt{x}-3)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})} = \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm})$$

2) Ta có:

$$\frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{B}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow B = \sqrt{2}$$

Câu 2.

a) 1) Ta có: $\frac{3a+1}{a+x} - \frac{a-1}{a-x} = \frac{2a(a^2-1)}{x^2-a^2} \quad (1)$

ĐKXĐ: $x \neq \pm a$

Biến đổi đưa phương trình về dạng: $2ax = a^2(a+1)$

Với $a = 0$ thì phương trình có dạng: $0x = 0$.

Phương trình (1) có vô số nghiệm với $x \neq 0$

Với $a \neq 0$ ta có $x = \frac{a(a+1)}{2}$

Để $x = \frac{a(a+1)}{2}$ là nghiệm của phương trình (1) thì:

$$\frac{a(a+1)}{2} \neq a \quad (2) \quad \text{và} \quad \frac{a(a+1)}{2} \neq -a \quad (3)$$

Giải(2) ta được $a \neq 1, a \neq 0$

Giải (3) ta có: $a \neq 0, a \neq -3$

Vậy: $a = 0$ phương trình có vô số nghiệm $x \neq 0$

$a = -3; a = 1$ phương trình vô nghiệm.

$a \neq 1; a \neq -3$ và $a \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{a(a+1)}{2}$

b) Theo câu a:

Với $a = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm $x \neq 0$ (loại do $a > 0$)

Với $a \neq 1; a \neq -3$ và $a \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{a(a+1)}{2}$

Vì a là số nguyên dương và $a \neq 1$ nên:

Nếu $a = 2$ thì $x = 3$, là số nguyên tố (thỏa mãn)

Nếu $a > 2$ thì $a = 2k$ hoặc $a = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}, k > 1$

Xét $a = 2k$ thì $x = k(2k + 1)$ là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên x là hợp số.
(loại)

Xét $a = 2k + 1$ thì $x = (2k + 1)(k + 1)$ là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên x là hợp số. (loại)

Vậy $a = 2$ thì nghiệm của phương trình $x = 3$ là số nguyên tố.

$$2) \text{ Ta có: } \begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz & (1) \\ x^2 = 2(y + z) & (2) \end{cases}$$

Vì $x, y, z > 0$ nên $xyz > 0$.

Kết hợp với phương trình (1)

$$\Rightarrow x^3 > y^3; x^3 > z^3 \Rightarrow x > y, x > z.$$

Do đó $2x > y + z$ hay $4x > 2(y + z)$ kết hợp với (2) ta có :

$$x^2 < 4x \text{ và } x : 2 \Rightarrow x < 4 \text{ và } x : 2 \text{ mà } x \in \mathbb{N}^* \text{ nên } x = 2.$$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào hệ phương trình ta được: } \begin{cases} y^3 + z^3 = 8 - 6yz \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = z = 1 \text{ (vì } x, y$$

nguyên dương)

Vậy nghiệm nguyên dương của hệ phương trình là: $(x; y; z) = (2; 1; 1)$

Câu 3.

$$1) \text{ Ta có: } \overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a = (n - 2)^2$$

$$\Rightarrow 99(a - c) = n^2 - 1 - n^2 + 4n - 4 = 4n - 5$$

$$\Rightarrow 4n - 5 : 99 \text{ (do } a - c \text{ là số nguyên)}$$

$$\text{Lại có: } 100 \leq n^2 - 1 \leq 999 \Rightarrow 101 \leq n^2 \leq 1000 \Rightarrow 11 \leq n \leq 31$$

$$\Rightarrow 39 \leq 4n - 5 \leq 119$$

$$\text{Vì } 4n - 5 : 99 \text{ nên } 4n - 5 = 99 \Leftrightarrow n = 26$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 675$$

2) Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC ta có :

$$p - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2} > 0$$

$$\text{Tương tự } p - b > 0; p - c > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương $p - a; p - b; p - c$ ta có:

$$(p - a) + (p - b) + (p - c) \geq 3\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\Rightarrow 0 < (p - a)(p - b)(p - c) \leq \left(\frac{3p - (a + b + c)}{3} \right)^3$$

Vì $a + b + c = 6$ nên bất đẳng thức trên trở thành :

$$0 < p^3 - p^2(a + b + c) + 3(ab + bc + ca) - abc \leq 1$$

$$0 < 3^3 - 3^2 \cdot 6 + 3(ab + bc + ca) - abc \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 27 - 54 + 3 \cdot \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} - abc \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 27 < 3 \cdot \frac{36 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} - abc \leq 28$$

$$\Leftrightarrow 54 < 108 - 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc \leq 56$$

$$\Leftrightarrow -54 < -3(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc \leq -52$$

$$\Leftrightarrow 52 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc < 54 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Câu 4.

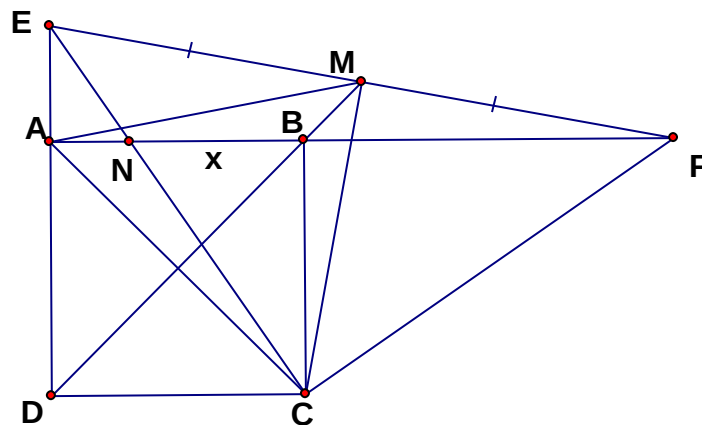
1) Chứng minh $\triangle BCF = \triangle DCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow CF = CE$ và $\angle DCE = \angle BCF$. Mà $\angle DCE + \angle ECB = 90^\circ \Rightarrow \angle BCF + \angle ECB = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle ECF = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ECF$ vuông cân tại C

Có M là trung điểm của EF nên CM là đường trung tuyến vừa là đường cao, phân giác, trung trực



$\Rightarrow \angle ECM = 45^\circ$, mà $\angle ACB = 45^\circ$ (do ABCD là hình vuông)

$\angle ACE = \angle BCM$ (1)

Mặt khác theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ta có: $MA = MC$ ($= \frac{1}{2}EF$) $\Rightarrow M \in$ trung trực của AC

mà BD là trung trực của đoạn thẳng AC.

$\Rightarrow M, B, D$ thẳng hàng

$$\Rightarrow \angle MBC = \angle EAC = 135^\circ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle BCM$ (g.g)

2) Đặt $BN = x \Rightarrow AN = a - x$

$$S_{ACFE} = S_{ACE} + S_{ECF} = \frac{1}{2} CD \cdot AE + \frac{1}{2} \cdot CE^2.$$

Tính AE: Có $\frac{AE}{ED} = \frac{AN}{DC}$ (do $AN \parallel DC$)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AE + AD} = \frac{a - x}{a} \Leftrightarrow AE = \frac{a(a - x)}{x}$$

$$\text{Ta có: } CE^2 = CD^2 + DE^2 = a^2 + (a + AE)^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2}$$

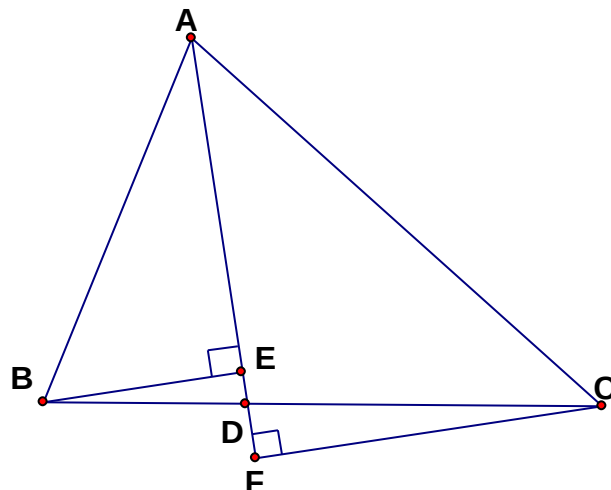
$$S_{ACFE} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a(a - x)}{x} + \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{a^4}{x^2} \right) = \frac{a^3(a + x)}{2x^2}$$

$$\text{Mà } S_{ACFE} = 3S_{ABCD} \Rightarrow \frac{a^3(a + x)}{2x^2} = 3a^2 \Leftrightarrow 6x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - a)(3x + a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Vậy $BN = \frac{a}{2} \Leftrightarrow N$ là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3S_{ABCD}$

Câu 5.



Trên tia BC lấy điểm D sao cho $\angle DAB = 30^\circ$.

Từ GT suy ra:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 75^\circ.$$

Do đó D nằm trên cạnh BC và $\angle DAC = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Kẻ $BE \perp AD, CF \perp AD$ ($E, F \in AD$)

Ta có $AB = 2BE$ (cạnh đối diện với góc 30° trong tam giác vuông) và $AC = \sqrt{2} CF$ (cạnh huyền trong tam giác vuông cân)

$$\text{Do đó } AB + AC\sqrt{2} = 2BC \Leftrightarrow 2BE + 2CF = 2BC$$

$$\Leftrightarrow BE + CF = BC \Leftrightarrow BE + CF = BD + CD$$

Mà $BE \leq BD$ và $CF \leq CD$ nên xảy ra đẳng thức trên khi và chỉ khi E, F trùng D . Tức là $AD \perp BC$.

$$\text{Từ đó } B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ; C = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Đề số 42

Câu 1. a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$.

$$\text{Rút gọn } A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \frac{x - 6\sqrt{x} - 27}{x + 2\sqrt{x} - 3} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 9)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\text{b) Có } \frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27 + 7\sqrt{5}}}{\sqrt{10} + 7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{54 + 14\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5} + 7)} = \frac{\sqrt{49 + 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} + 5}}{7 + \sqrt{5}} = \frac{7 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow x = 9 \text{ (TM)}$$

ĐK)

$$\text{Thay vào } A \text{ ta được: } A = \frac{\sqrt{9} - 9}{\sqrt{9} - 2} = -6.$$

$$\text{c) Có } P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\text{Ta có: } P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 9 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x} + 2 > 0).$$

$$\Leftrightarrow x < 81.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có: $0 \leq x < 81; x \neq 1; x \neq 4$.

Câu 2. a) Gọi hai số lẻ là $(2a+1); (2b+1); (a, b \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Đặt } S = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 = 4(a^2 + b^2 + a + b) + 2 \Rightarrow S \equiv 2 \pmod{4}$$

Mà một số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1.

Vậy S không là số chính phương.

$$\text{b) ĐKXĐ: } -\frac{3}{2} \leq x \leq 4$$

$$\begin{aligned}
x+17 &= 2\sqrt{4-x}+6\sqrt{2x+3} \\
\Leftrightarrow 4-x-2\sqrt{4-x}+1+2x+3-6\sqrt{2x+3}+9 &= 0 \\
\Leftrightarrow (\sqrt{4-x}-1)^2 + (\sqrt{2x+3}-3)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x}-1=0 \\ \sqrt{2x+3}-3=0 \end{cases} &\Leftrightarrow x=3 \text{ (TMDK)}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$

$$\begin{aligned}
\text{c) } 6x^2+19y^2+24x-2y+12xy-725 &= 0. \\
\Leftrightarrow 6(x^2+y^2+4+2xy+4x+4y)+13(y^2-2y+1) &= 762 \\
\Leftrightarrow 6(x+y+2)^2+13(y-1)^2 &= 762. \\
\Rightarrow 13(y-1)^2 &\leq 762 \\
\Rightarrow (y-1)^2 &\leq \frac{762}{13} \\
\Rightarrow (y-1)^2 &\leq 58
\end{aligned}$$

Do $6(x+y+2)^2; 762$ đều chia hết cho 6 và $(13,6)=1 \Rightarrow (y-1)^2$ là số chính phương và chia hết cho 6. Mặt khác $(y-1)^2 \leq 58$

$$\Rightarrow (y-1)^2 \in \{0; 36\}$$

Ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ 6(x+y+2)^2 = 762 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ (x+2)^2 = 127 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} (y-1)^2 = 36 \\ 6(x+y+2)^2 + 13 \cdot 36 = 762 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=7 \\ y=-5 \end{cases} \\ (x+y+2)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\text{Với } y=7 \Rightarrow (x+7+2)^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x+9=7 \\ x+9=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-16 \end{cases}$$

$$\text{Với } y=-5 \Rightarrow (x-5+2)^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x-3=7 \\ x-3=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(-2; 7); (-16; 7); (10; -5); (-4; -5)\}$$

Câu 3. * Tìm GTLN

Theo BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$x^2+1 \geq 2x; y^2+1 \geq 2y; z^2+1 \geq 2z$$

$$\Rightarrow M = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq \frac{x}{2x} + \frac{y}{2y} + \frac{z}{2z} = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1,5 khi $x = y = z = 1$.

* Tìm GTNN

Có $x, y, z \geq 0; x + y + z = 3 \Rightarrow z \leq 3$

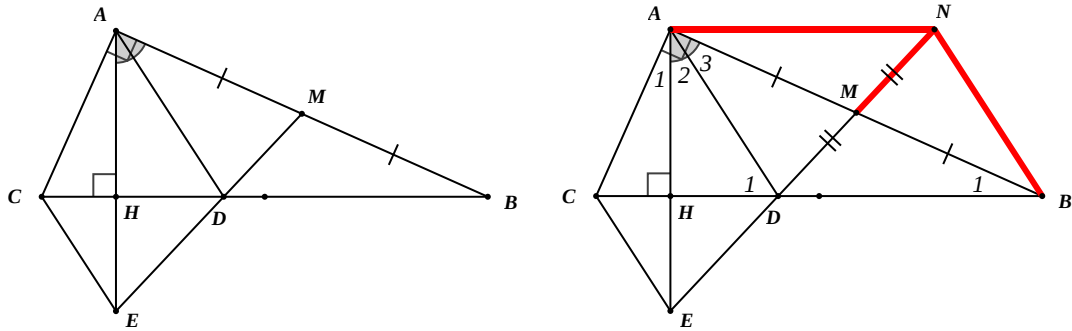
Do vai trò của x, y, z như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $z \geq x; z \geq y$

$$\Rightarrow M = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \geq \frac{x}{z^2+1} + \frac{y}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} = \frac{x+y+z}{z^2+1} \geq \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{10}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 0; z = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là $\frac{3}{10}$ khi $x = y = 0; z = 3$ hoặc các hoán vị của nó.

Câu 4.



a) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong các tam giác vuông, ta có:

$$AB^2 = BH \cdot BC; AC^2 = AH \cdot BC$$

$$\text{Do đó: } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{AH \cdot BC} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{AH}$$

b) Ta có:

$$S_{AHC} = \frac{1}{2} AH \cdot HC = 8,64 (cm^2); S_{AHB} = \frac{1}{2} AH \cdot HB = 15,36 (cm^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} AH^2 \cdot HC \cdot HB = 8,64 \cdot 15,36$$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta có:

$$AH^2 = HB \cdot HC$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} AH^2 \cdot AH^2 = 8,64 \cdot 15,36 \Rightarrow AH^4 = 4 \cdot 8,64 \cdot 15,36 \Rightarrow AH = 4,8 (cm)$$

c) Gọi N là điểm đối xứng với D qua M . ta có $ANBD$ là hình bình hành.

$$\text{Khi đó: } NA \parallel BD; NA = BD \Rightarrow \frac{DH}{NA} = \frac{HE}{AE} \quad (1) \quad (\text{Định lý Ta - let})$$

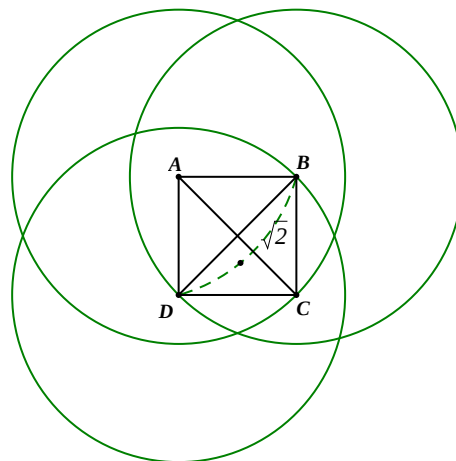
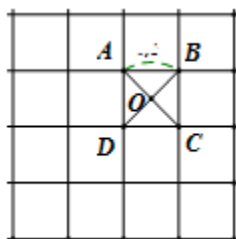
$$\text{Vì } AD \text{ là phân giác của góc } BAH \Rightarrow \frac{DH}{DB} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{DH}{NA} = \frac{AH}{AB} \quad (2)$$

Mà $\triangle AHB \sim \triangle CHA (g - g) \Rightarrow A_1 = B_1 \Rightarrow A_2 = A_1 + A_2 = B_1 + A_3 = D_1 \Rightarrow \triangle CAD$ cân tại C
 $\Rightarrow CA = CD$

$$\text{Do } \triangle AHB \sim \triangle CHA (g - g) \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{CD} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3)} \Rightarrow \frac{HE}{AE} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow CE \parallel AD \text{ (theo ĐL Ta- lét đảo)}$$

Câu 5. HD. Ta chia hình vuông đều cho thành 16 hình vuông nhỏ bằng nhau (như hình vẽ)



Ta được độ dài cạnh của hình vuông nhỏ là: 1

Có 33 điểm đặt vào 16 hình vuông

theo nguyên lí Dirichlet

Suy ra tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 3 điểm

Giả sử hình vuông nhỏ đó là: ABCD (AC cắt BD tại O)

$$\text{Có } OA = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = DB = \sqrt{2}$$

Giả sử 3 điểm đó trùng với 3 trong 4 đỉnh bất kì của hình vuông ABCD thì phần chung của ba hình tròn chứa toàn bộ hình vuông và như vậy đã tồn tại 3 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu trong 3 điểm có điểm nằm bên trong hình vuông thì phần chung của ba hình tròn cũng chứa toàn bộ hình vuông và như vậy đã tồn tại 3 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán

KL: tồn tại 3 điểm trong các điểm đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đề số 43

Câu 1.

$$a/ x^2 - 9x + 20 = x^2 - 4x - 5x + 20 = x(x - 4) - 5(x - 4) = (x - 4)(x - 5)$$

b/ Với ĐK : $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$ ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{(2\sqrt{x}-9)-(x-9)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{x+4\sqrt{x}+3}{x-9}$$

Câu 2. a/ $\sqrt{3x^2-20x+16} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 3x^2-20x+16 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 3x^2-20x+16 = x^2-8x+16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x(x-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình trên có 1 nghiệm là $x = 6$

b/ Chia tử và mẫu của A cho x^2 ($x \neq 0$) ta có $A = \frac{8+6\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$

Đặt $\frac{y}{x} = t$ ta có :

$$A = \frac{6t+8}{t^2+1} = 9 + \frac{-9t^2+6t-1}{t^2+1} = 9 + \frac{-(3t-1)^2}{t^2+1} \leq 9$$

$$A = \frac{6t+8}{t^2+1} = -1 + \frac{t^2+6t+9}{t^2+1} = -1 + \frac{(t+3)^2}{t^2+1} \geq -1$$

Vậy $-1 \leq A \leq 9$

Do đó A đạt giá trị nhỏ nhất là -1 khi $y = -3x$ và đạt giá trị lớn nhất là 9 khi $x = 3y$

Câu 3. a/ Ta có : $4S = 4[1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)]$

$$= 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + n(n+1)(n+2)[n+3-(n-1)]$$

$$= 1.2.3.4 - 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \dots - (n-1)n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= n(n+1)(n+2)(n+3) = (n+3n+1-1)(n+3n+1+1) = (n+3n+1)^2 - 1$$

Vậy $4S + 1 = (n+3n+1)^2 - 1 + 1 = (n+3n+1)^2$

Suy ra $4S + 1$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương n

b/ Vì $a, b, c, d > 0$ nên ta có:

$$\frac{a}{a+b+d} > \frac{a}{a+b+c+d}; \quad \frac{b}{a+b+c} > \frac{b}{a+b+c+d}; \quad \frac{c}{b+c+d} > \frac{c}{a+b+c+d};$$

$$\frac{d}{a+c+d} > \frac{a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{a}{a+b+d} < \frac{a}{a+b} \quad ; \quad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+b} \quad ; \quad \frac{c}{b+c+d} < \frac{c}{c+d} \quad ;$$

$$\frac{d}{a+c+d} < \frac{d}{c+d}$$

$$\text{Suy ra } S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

$$\text{Vậy } 1 < S < 2$$

Câu 4.

+ Xét $\triangle AEB$ và $\triangle CBD$ có:

$$AB = BC \quad (\triangle ABC \text{ đều})$$

$$\angle ABE = \angle CBD \quad (\text{cùng bằng } 60^\circ - \angle ABD)$$

$$EB = BD \quad (\triangle BDE \text{ đều})$$

$$\text{suy ra } \triangle AEB = \triangle CDB \quad (\text{c-g-c})$$

$$\text{do đó } AE = CD$$

$$\text{mà } CD = DF \quad (\triangle CDF \text{ đều})$$

$$\text{nên } AE = DF \quad (1)$$

+ Xét $\triangle AFC$ và $\triangle CBD$ có:

$$AC = BC \quad (\triangle ABC \text{ đều})$$

$$\angle ACF = \angle BCD \quad (\text{cùng bằng } 60^\circ - \angle ACD)$$

$$FC = CD \quad (\triangle CDF \text{ đều})$$

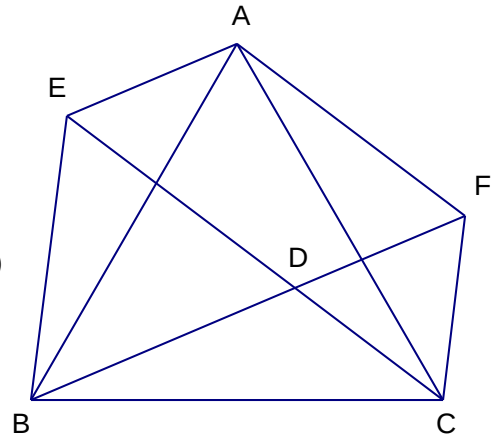
$$\text{suy ra } \triangle AFC = \triangle BDC \quad (\text{c-g-c})$$

$$\text{do đó } AF = BD$$

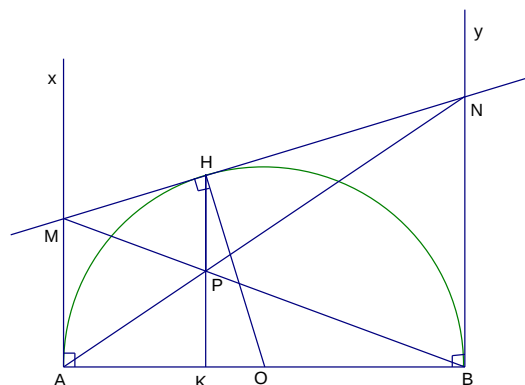
$$\text{mà } ED = BD \quad (\triangle BED \text{ đều})$$

$$\text{nên } AF = ED \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có tứ giác AEDF là hình bình hành.



Câu 5.



a/ Ta có Ax ; By là tiếp tuyến của (O) (gt) nên $AM \perp AB$; $BN \perp AB$

do đó $AM \parallel BN$

suy ra $\triangle APM \sim \triangle NPB$

$$\text{nên} \quad \frac{AP}{NP} = \frac{AM}{BN} \quad (1)$$

Ta lại có :

Tiếp tuyến qua A và H của (O) cắt nhau tại M (gt) nên $MH = AM$ (2)

Tiếp tuyến qua B và H của (O) cắt nhau tại N (gt) nên $NH = BN$ (3)

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có:} \quad \frac{AP}{NP} = \frac{MH}{NH}$$

Theo định lí đảo Talet ta có $HP \parallel AM$

b/ Xét $\triangle AHB$ có $OH = OA = OB = R = \frac{AB}{2}$ ($A, B, H \in (O)$) nên $\triangle AHB$ vuông tại H

Mặt khác $HP \parallel MA$ (cmt) và $MA \perp AB$ (Ax là tiếp tuyến của (O)) nên $HP \perp AB$ hay $HK \perp AB$

Áp dụng hệ thức lượng đối với $\triangle AHB$ ta có:

$$HK^2 = KA \cdot KB = \frac{1}{5} AB \cdot (AB - \frac{1}{5} AB) = \frac{4}{25} (2R)^2$$

$$\text{Vậy} \quad HK = \frac{4}{5} R$$

Đề số 44

Câu 1.

a) Ta có: $A = 6^{2015} + 1 : 6 + 1 = 7 : 7$ và $B = 6^{2016} - 1 = (6^2)^{1013} - 1 : 6^2 - 1 = 35 : 7$.

$$\text{b) Ta có:} \quad 10.A = \frac{10.(10^{2016} - 1)}{10^{2017} - 11} = \frac{10^{2017} - 11 + 1}{10^{2017} - 11} = 1 + \frac{1}{10^{2017} - 11} \quad (*)$$

$$10.B = \frac{10.(10^{2016} + 1)}{10^{2017} + 9} = \frac{10^{2017} + 9 + 1}{10^{2017} + 9} = 1 + \frac{1}{10^{2017} + 9} \quad (**)$$

Ta thấy $\frac{1}{10^{2017} - 11} > \frac{1}{10^{2017} + 9}$ nên từ (*) và (**) $\Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Câu 2. a) Rút gọn $P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$

$$P = \frac{2\sqrt{x} - 9 + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$P = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất:

$$Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1} = \frac{(2017x^2 + 2017) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{2017(x^2 + 1) - (x-1)^2}{x^2 + 1} = 2017 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \quad (*)$$

Vì $\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ nên từ (*) $\Rightarrow Q \leq 2017$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy $\max Q = 2017 \Leftrightarrow x=1$

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Ta có: $6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) (*)$

Từ (*) suy ra: $6(x^2 - 4) : 5$, Mà $UCLN(6,5)=1$ nên $x^2 - 4 : 5$

Đặt $x^2 - 4 = 5t$ ($t \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x^2 = 5t + 4$ thay vào (*) $\Rightarrow y^2 = 10 - 6t$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 > 0 \\ y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 5t + 4 > 0 \\ y^2 = 10 - 6t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -\frac{4}{5} \\ t < \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5} < t < \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$

$\oplus$ Khi $t=0$ thì $y^2=10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

$\oplus$ Khi $t=1$ thì $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (vì nghiệm nguyên dương nên lấy

$x > 0, y > 0$)

Cách khác :

Ta có: $6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) (*)$

Từ (*) suy ra: $6(x^2 - 4) : 5$, Mà $UCLN(6,5)=1$ nên $x^2 - 4 : 5$

$\Rightarrow [(x^2 - 4) + 5] : 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 : 5 (**)$

Từ bài ra $\Rightarrow 0 < 6x^2 < 74 \Rightarrow 0 < x^2 < 12$, Kết hợp (**) $\Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 9$

$\oplus$ Khi $x^2 = 4$ thì $y^2 = 10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

$\oplus$ Khi $x^2 = 9$ thì $y^2 = 4 \Rightarrow (x=3, y=2)$ (vì $x > 0, y > 0$)

Câu 3.

a) Xét pt: $(m-4)x + (m-3)y = 1$

Ta thấy: $(m-4).0 + (m-3).0 = 0 \neq 1$ nên (d) không thể đi qua $O(0;0)$.

+ Với $m=4$ ta được $y=1$ nên khoảng cách từ (d) đến $O(0;0)$ bằng $|y|=1$.

+ Với $m=3$ ta được $x=-1$ nên khoảng cách từ (d) đến $O(0;0)$ bằng $|x|=|-1|=1$.

+ Với $m \neq 3; m \neq 4$ thì (d) cắt Ox tại $A\left(\frac{1}{m-4}, 0\right)$ và cắt Oy tại $B\left(0, \frac{1}{m-3}\right)$.

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H ; ta có khoảng cách từ (d) đến $O(0;0)$ là OH .

Dựa vào ΔOAB vuông tại O chỉ ra được

$$\frac{1}{OH^2} = (m-4)^2 + (m-3)^2 = 2\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra được: $OH \leq \sqrt{2}$

Suy được khoảng cách từ O đến (d) lớn nhất $OH = \sqrt{2}$ khi $m = \frac{7}{2}$

b) Vì a, b, c là các số dương (gt) nên ta có:

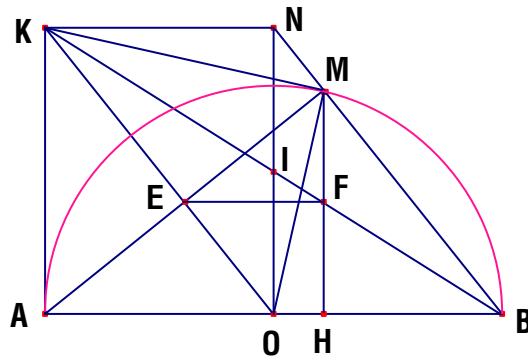
$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3), ta có: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$ (đpcm).

Câu 4.



a) Chứng minh được $OK \perp AM$ tại E .

Dựa vào ΔOAK vuông tại A chỉ ra được $OE \cdot OK = OA^2 = R^2$ không đổi.

b) Chứng minh được: $OK \parallel BN$ ($\perp AM$)

Chứng minh được: $\Delta AOK = \Delta OBN$ (g.c.g) $\Rightarrow OK = BN$.

Suy được $OBKN$ là hình bình hành từ đó suy được: $IN = IO$.

c) Chứng minh được $\Delta AOK \sim \Delta HBM \Rightarrow \frac{HB}{AO} = \frac{MB}{OK} \Rightarrow \frac{HB^2}{AO^2} = \frac{MB^2}{OK^2}$ (1)

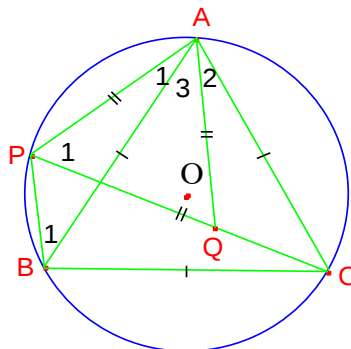
Chỉ ra được $MB^2 = HB \cdot AB$ và $OA^2 = OE \cdot OK$ (câu a) (2)

Từ (1) và (2) suy được $\frac{HB^2}{OK \cdot OE} = \frac{HB \cdot AB}{OK^2} \Rightarrow \frac{HB}{OE} = \frac{AB}{OK} \Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{OE}{OK}$ (3)

Chứng minh được $\frac{HB}{AB} = \frac{FB}{BK}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{FB}{KB} = \frac{OE}{OK} \Rightarrow EF \parallel OB \parallel AB$ (đl Ta let)

Câu 5.



- Vì $\triangle ABC$ đều, $P \in AB$ nên $AP < PC$. Lấy điểm Q trên PC sao cho $PQ = PA$.

Ta thấy $\triangle APQ$ cân có $\angle APQ = \angle P_1 = 60^\circ$ (chấn cung 120°) nên $\triangle APQ$ đều $\Rightarrow AP = AQ = PQ$

- Chứng minh được $\triangle APB = \triangle AQC$ (c.g.c) $\Rightarrow PB = QC$.

Từ đó $\Rightarrow PA + PB = PQ + QC = PC$. Mà PC là một dây của $(O; R)$ nên $PC \leq 2R$.

Chứng tỏ tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn $(O; R)$. (đpcm)

Đề số 45

Câu 1.

a) Ta có:

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} > 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{5} - 2$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{5} + 1 \text{ (do } A > 0)$$

b) Vì a, b, c dương và $a + b + c = 1$ nên biểu thức B có nghĩa và $0 < a, b, c < 1$. Ta có:

$$B = \sqrt{\frac{(1-b-c+bc)(1-a-c+ca)}{1-a-b+ab}} + \sqrt{\frac{(1-a-b+ab)(1-a-c+ca)}{1-b-c+bc}} + \sqrt{\frac{(1-a-b+ab)(1-b-c+bc)}{1-a-c+ca}}$$

$$B = \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)(1-a)(1-c)}{(1-a)(1-b)}} + \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-a)(1-c)}{(1-b)(1-c)}} + \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-c)}}$$

$$B = \sqrt{(1-c)^2} + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(1-b)^2}$$

$$B = |1-c| + |1-a| + |1-b|$$

$$B = 1-c + 1-a + 1-b \text{ (vì } 0 < a, b, c < 1)$$

$$\text{Tính đúng: } B = 2$$

Câu 2.

a) Ta có: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Theo bài ra: $f(x) : (x-1)(x-2)$

$$f(x) \text{ chia hết cho } x-1 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a \quad (1)$$

$$f(x) \text{ chia hết cho } x-2 \Rightarrow f(2) = 0$$

$$\Rightarrow 8a + 2b = -15 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 8a + 2(-a) = -15 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$\text{Thử lại: } (x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{5}{2}, b = \frac{5}{2}$$

b) Ta có: $B = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$

$$B = 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2$$

$$B = 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz).yz + y^2z^2$$

$$B = (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2$$

Vì x, y, z là số nguyên nên $2x^2 + 2xy + 2xz + yz$ là số nguyên

$\Rightarrow B$ là số chính phương

Câu 3.

a) ĐKXĐ: $x \neq 2$

$$\frac{2m-1}{x-2} = m-3 \Rightarrow 2m-1 = (x-2)(m-3)$$

$$\Rightarrow 2m-1 = mx - 2m - 3x + 6 \Rightarrow (m-3)x = 4m-7 (*)$$

+ Xét $m = 3$, phương trình (*) trở thành $0.x = 5$ (vô lí)

$\Rightarrow m = 3$ phương trình đã cho vô nghiệm

+ Xét $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm $x = \frac{4m-7}{m-3}$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\frac{4m-7}{m-3} = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

Vậy với $m = 3, m = \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b) ĐKXD: $x \geq -1$

$$4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1}-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (tm)}$$

c) Áp dụng BĐT Cosi cho các số dương ta có:

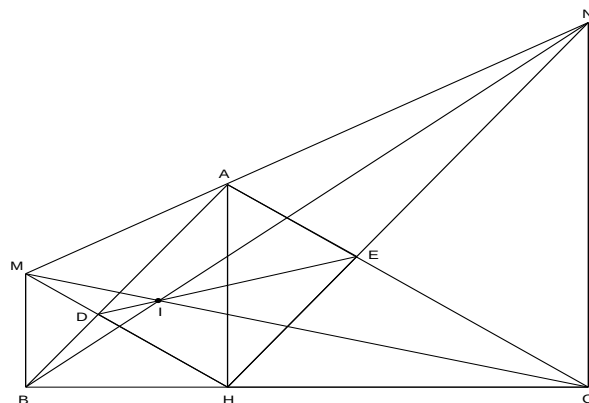
$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt{xyz} \Rightarrow xyz \leq 1$$

Vì x, y, z là các số nguyên dương nên từ (1) $\Rightarrow x = y = z = 1$

Thử lại : Đúng.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y;z) = (1;1;1)$

Câu 4.



a) Đặt $BH = x$ ($0 < x < 6$) $\Rightarrow BC = x + 6,4$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 6^2 = x(x + 6,4)$$

$$\Rightarrow x = 3,6$$

$$\Rightarrow BC = 10\text{cm}$$

$$\Rightarrow AC = 8\text{cm}$$

b) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AH$

Chứng minh: $BH^2 = BD.BA$, $CH^2 = CE.CA$

$$AH^2 = HB.HC \Rightarrow AH^4 = HB^2.HC^2 = BD.BA.CE.CA$$

$$\Rightarrow AH^4 = BD.CE.BC.AH$$

$$\Rightarrow AH^3 = BD.CE.BC$$

$$\text{Vậy } DE^3 = BD.CE.BC$$

c) Chứng minh $\angle CNH = \angle BHM$, $HD = AE$

Gọi giao điểm của NA với HD là M'.

Ta có:

$$\cos^2 CNH = \frac{NE}{NC} \cdot \frac{NC}{NH} = \frac{NE}{NH} = \frac{AE}{M'H}$$

$$\cos^2 BHM = \frac{HD}{HB} \cdot \frac{HB}{HM} = \frac{HD}{HM} = \frac{AE}{HM}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{M'H} = \frac{AE}{MH} \Rightarrow M'H = MH$$

$$\Rightarrow M' \text{ trùng } M \Rightarrow M, A, N \text{ thẳng hàng}$$

d) Có $BM \parallel CN$, $BD \parallel NE$, $MD \parallel CE$

$$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle NEC \Rightarrow BD/NE = DM/EC \quad (1)$$

$$\text{Gọi } I \text{ là giao của } MC \text{ với } DE \Rightarrow DI/EI = DM/EC \quad (2)$$

$$\text{Gọi } I' \text{ là giao của } BN \text{ với } DE \Rightarrow DI'/EI' = BD/NE \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow DI/EI = DI'/EI' \Rightarrow I \text{ và } I' \text{ trùng nhau}$$

Vậy BN , CM , DE đồng qui.

Câu 5.

Xét đa thức $g(x) = f(x) - 10x \Rightarrow$ bậc của đa thức $g(x)$ bằng 4

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow g(1) = g(2) = g(3) = 0.$$

Mà $g(x)$ có bậc 4 nên $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$ (với a là số thực nào đó).

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a) + 10x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(8) = 7.6.5.(8-a) + 80 \\ f(-4) = (-5)(-6)(-7)(-4-a) - 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(8) + f(-4) = 5.6.7.(8-a+4+a) + 40$$

$$\text{Vậy } f(8) + f(-4) = 2560.$$

Đề số 46

Câu 1.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x-y} \text{ với } x, y \geq 0 \text{ và } x \neq y \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - y\sqrt{y} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} + \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\
&= \frac{3\sqrt{x}(x - \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \frac{3\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 3
\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến với $x, y \geq 0$ và $x \neq y$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } x_o^3 &= \left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \right)^3 \\
\Leftrightarrow x_o^3 &= 9+4\sqrt{5} + 9-4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} \cdot x_o \\
\Leftrightarrow x_o^3 &= 3x_o + 18 \\
\Leftrightarrow (x_o^3 - 3x_o - 17)^{2019} &= 1^{2019} \\
\Leftrightarrow (x_o^3 - 3x_o - 17)^{2019} - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Vậy x_o là một nghiệm của phương trình $(x^3 - 3x - 17)^{2019} - 1 = 0$.

Câu 2.

a) Xét phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ (1)

Ta thấy $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall m$.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

$$\text{Khi đó } B = \frac{2x_1 x_2 + 7}{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + 2} = \frac{2(2m-3) + 7}{4m^2 + 2} = \frac{4m+1}{4m^2+2}$$

$$B = \frac{4m^2 + 2 - 4m^2 + 4m - 1}{4m^2 + 2} = 1 - \frac{(2m-1)^2}{4m^2 + 2} \leq 1$$

$$(\text{vì } \frac{(2m-1)^2}{4m^2+2} \geq 0 \quad \forall m).$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là 1 khi $m = \frac{1}{2}$.

b) Xét phương trình (I) $\begin{cases} x^3y^3 + 1 = 19x^3 \\ xy^2 + y = -6x^2 \end{cases}$.

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, suy ra $x \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x} + y\right)^3 - 3\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x} + y\right) = 19 \\ \frac{y}{x}\left(\frac{1}{x} + y\right) = -6 \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x} + y = u$; $\frac{y}{x} = v$ ta có:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19 \\ uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 1 \\ uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -6 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{x} + y = 1 \\ \frac{y}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + x - 1 = 0 \\ y = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(3x-1) = 0 \\ y = -6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có hai nghiệm $\left(-\frac{1}{2}; 3\right); \left(\frac{1}{3}; -2\right)$

Câu 3.

a) Xét x là số nguyên dương, ta thấy

$$x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2+1) : 6 \quad (1) \quad (\text{vì chứa tích của ba số nguyên liên tiếp})$$

Với $x = 5q$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) thì $x^5 - x : 5$

Với $x = 5q \pm 1$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) thì $x^5 - x : 5$

Với $x = 5q \pm 2$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) thì $x^5 - x : 5$

Suy ra $x^5 - x : 5$ (2) mà $(5, 6) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $x^5 - x : 30$

$$\text{Xét hiệu } Q - P = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + (a_3^5 - a_3) + \dots + (a_{2019}^5 - a_{2019})$$

Vì $x^5 - x : 30$ nên $Q - P : 30$

Mà theo bài ra $P:30$ nên $Q:30$

b) Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+a^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a+a^2)}} \geq \frac{2}{(1+a)+(1-a+a^2)} = \frac{2}{2+a^2}$

Tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+b^3}} \geq \frac{2}{2+b^2}; \frac{1}{\sqrt{1+c^3}} \geq \frac{2}{2+c^2}$

Bài toán trở về: $\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số a^2, b^2, c^2 có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 12$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Câu 4.

a) Chứng minh $\triangle ABI \sim \triangle AIE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{AE} = \frac{AB}{AI} \Rightarrow AI^2 = AE \cdot AB$$

Tương tự $AI^2 = AD \cdot AC$

Suy ra

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB \text{ c.g.c}$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle ACB \Rightarrow \text{Tứ giác } BCDE \text{ nội tiếp.}$$

b) Vì tứ giác $BCDE$ nội tiếp suy ra

$$\angle ADE = \angle ABC$$

$$\text{mà } \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC \Rightarrow \angle ADE = \frac{1}{2} \angle AOC$$

$$\text{Vì } \triangle AOC \text{ cân tại } O \text{ suy ra } \angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2}$$

Suy ra $\angle ADE + \angle OAC = 90^\circ$. Vậy $OA \perp DE$.

c) Gọi P là giao điểm của BM và CN .

$$\text{Vì } O_1O_2 \parallel MN \Rightarrow \angle BO_1I = \angle BON \text{ (hai góc đồng vị)}$$

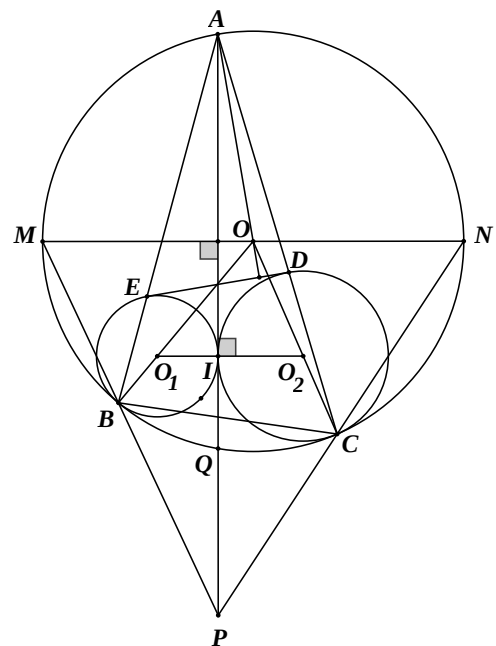
$$\text{Do } \triangle O_1BI \text{ cân tại } O_1 \text{ suy ra } \angle O_1BI = \frac{180^\circ - \angle BO_1I}{2}$$

$$\text{Tương tự } \angle OBN = \frac{180^\circ - \angle BON}{2} \Rightarrow \angle O_1BI = \angle OBN.$$

Suy ra ba điểm B, I, N thẳng hàng. Suy ra $BN \perp BM$.

Chứng minh tương tự ba điểm C, I, M thẳng hàng $\Rightarrow CN \perp CM$

Do đó I là trực tâm của $\triangle PMN \Rightarrow PI \perp MN$



Mà $AI \perp MN$ nên ba điểm A, I, P thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng AQ, BM, CN đồng quy.

Câu 5.

Gọi độ dài hình chiếu của EF trên AB, CD là x_1, y_1 .

Ta có $x_1 + y_1 \geq 1$.

Gọi độ dài hình chiếu của 37 đoạn thẳng còn lại trên AB là $x_2, \dots, x_{38}$ trên CD là $y_2, \dots, y_{38}$.

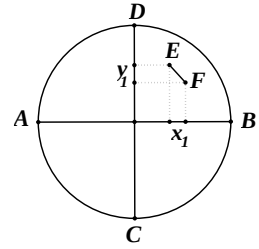
Khi đó ta có $(x_1 + x_2 + \dots + x_{38}) + (y_1 + y_2 + \dots + y_{38}) \geq 38$

Do vậy tồn tại một trong hai tổng lớn hơn hoặc bằng 19, giả sử

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{38} \geq 19$$

Do đó trên AB tồn tại một điểm M thuộc ít nhất hai trong các hình chiếu trên AB .

Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB là đường thẳng cần tìm.



Đề số 47

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

ĐKXĐ: $x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

b) Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$.

Hãy tính giá trị biểu thức

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Ta có: $xy + yz + zx = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+z)(x+y)$

Tương tự: $1 + y^2 = (y+z)(y+x)$, $1 + z^2 = (z+x)(z+y)$

Thay các kết quả trên vào biểu thức A để tính.

Câu 2.

a) Cho hàm số: $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2012}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$$\text{Từ } a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \left[\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} \right] = 32 - 12a \text{ nên}$$

$$a^3 + 12a = 32.$$

$$\text{Vậy } f(a) = 1.$$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương?

$$\text{Giả sử: } n^2 + 17 = k^2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) và } k > n \Rightarrow (k-n)(k+n) = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} k-n=1 \\ k+n=17 \end{cases} \Rightarrow n=8$$

Vậy với $n=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. a) ĐK: $-4 \leq x \leq 1$

$$\text{Bình phương 2 vế: } 1-x+4+x+2\sqrt{(1-x)(4+x)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4-3x-x^2 = 4 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=0; x=-3$.

$$\text{b) } x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq \frac{-3}{2}$$

$$x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (2x + 3 - 2\sqrt{2x+3} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}=1 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Câu 4.

$$\text{a) Tìm } x; y \text{ thỏa mãn: } 2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$$

ĐK: $x \geq 4; y \geq 4$. Ta có:

$$2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{y-4} + y \cdot 2\sqrt{x-4} = xy$$

$$\text{Xét } VP = x \cdot 2\sqrt{y-4} + y \cdot 2\sqrt{x-4}$$

$$\text{Theo BĐT Côsi: } 2\sqrt{y-4} \leq \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{2}; 2\sqrt{x-4} \leq \frac{4+x-4}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Vậy } VP \leq xy = VT$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \sqrt{x-4}=2 \\ \sqrt{y-4}=2 \end{cases} \Rightarrow x=y=8 \text{ khi (thỏa mãn ĐK)}$$

b) Cho $a; b; c$ là các số thuộc đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Hãy chứng minh rằng: $a+b+c \geq 0$

Do $a; b; c$ là các số thuộc đoạn $[-1; 2]$ nên $a+1 \geq 0; a-2 \leq 0$ nên $(a+1)(a-2) \leq 0$

Hay $a^2 - a - 2 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq a + 2$

Tương tự $b^2 \leq b + 2; c^2 \leq c + 2$.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6$. Mà theo đề bài $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ nên $a + b + c \geq 0$

Câu 5. a) Sử dụng định lý Pytago:

$$\frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2} = \frac{AK^2 + KC^2 + (BK + CK)^2 - AB^2}{(BK + CK)^2 + BA^2 - (AK + KC)^2}$$

$$= \frac{2CK^2 + 2BK \cdot CK}{2BK^2 + 2BK \cdot CK} = \frac{2CK(CK + BK)}{2BK(BK + CK)} = \frac{CK}{BK}$$

b) Ta có $\tan B = \frac{AK}{BK}; \tan C = \frac{AK}{CK}$

nên $\tan B \tan C = \frac{AK^2}{BK \cdot CK} \quad (1)$

Mặt khác ta có $B = HKC$ mà $\tan HKC = \frac{KC}{KH}$

Nên $\tan B = \frac{KC}{KH}$

Tương tự $\tan C = \frac{KB}{KH}$. Do đó $\tan B \cdot \tan C = \frac{KB \cdot KC}{KH^2} \quad (2)$

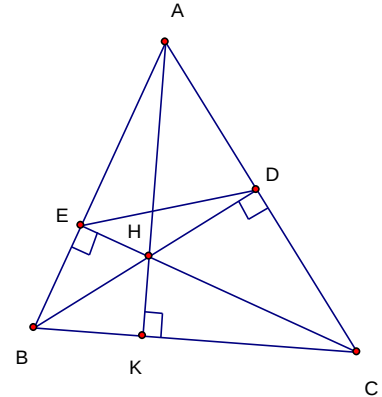
Từ (1) và (2) $\Rightarrow (\tan B \cdot \tan C)^2 = \left(\frac{AK}{KH}\right)^2$

Theo giả thiết $HK = \frac{1}{3}AK$ nên $\tan B \cdot \tan C = 3$

c) Ta chứng minh được: $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ đồng dạng vậy: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 \quad (3)$

Mà $BAC = 60^\circ$ nên $ABD = 30^\circ \Rightarrow AB = 2AD \quad (4)$

Từ (3) và (4) ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 4 \Rightarrow S_{ADE} = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$



Đề số 48

Câu 1.

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M : Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$M = \left(\frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left[\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*)

$$2) M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3: \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

$$U(3) \in \{\pm 1; \pm 3\} \text{ Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 3\}$ Xảy ra các trường hợp sau:

$$\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (TMĐK (*))}$$

$$\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4 \text{ (không TMĐK (*) loại)}$$

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên.

b)

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

$$\text{Có } \sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = |4-\sqrt{2}| = 4-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}+4} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1|$$

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}-1}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3}+1| - \sqrt{3} = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$$

$$\text{Với } x=1. \text{ Ta có } P = 3.1^{2013} + 5.1^{2011} + 2006 = 3+5+2006 = 2014$$

Vậy với $x=1$ thì $P=2014$.

Câu 2. a) $(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)=24 \Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)=24 \quad (1)$

Đặt $x^2+9x+19=y$ phương trình (1) trở thành :

$$(y+1)(y-1)-24=0 \Leftrightarrow y^2-25=0 \Leftrightarrow (y-5)(y+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+9x+24)(x^2+9x+14)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$$

Chứng tỏ $x^2+9x+24 > 0$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=-2; x=-7$.

b) Ta có $2x-x^2-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2 < 0$

Phương trình trở thành : $2x-x^2-1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=1$.

Câu 3. a) (1,0 điểm)

$$\begin{aligned} M &= \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 y^2 + 1 + 1 + \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{x^4 y^4 + 2x^2 y^2 + 1}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x^2 y^2 + 1)^2}{x^2 y^2} = \left(\frac{x^2 y^2 + 1}{xy}\right)^2 = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \end{aligned}$$

Ta có: $xy + \frac{1}{xy} = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy}$

* Ta có: $xy + \frac{1}{16xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{16xy}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1)

* $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{16xy} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{16xy} \geq \frac{15}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$.

Vậy $M = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{16xy} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \quad (\forall x, y > 0)$

Vậy $\min_M = \frac{289}{16}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$.

b) (1,0 điểm)

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$) $\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) \end{aligned}$$

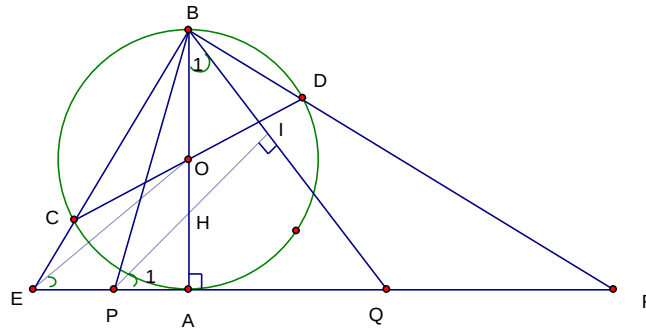
Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z} + \frac{4}{y+z} \right) \\ &\leq \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 4.



1) BA là đường cao của tam giác BPQ suy ra H thuộc BA .

Nối OE , $\triangle BEF$ vuông tại B ; $BA \perp EF$ nên $AB^2 = AE \cdot AF$.

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{\frac{1}{2}AB} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AF} \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AQ}$$

Vậy $\triangle AEO \sim \triangle ABQ$ (c.g.c). Suy ra $\angle ABQ = \angle AEO$ mà $\angle ABQ = P_1$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc) nên $\angle AEO = P_1$, mà hai góc đồng vị.

Trong $\triangle AEO$ có $PE = PA$ (giả thiết); $PH \parallel OE$ suy ra H là trung điểm của OA .

2) Ta có:

$$P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) [\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha]$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

Ta có:

$$\left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^2 \geq 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 1 \geq 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4}$$

Suy ra: $P = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Do đó: $P_{\min} = \frac{1}{4}$ khi và chỉ khi: $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$ (vì α là góc nhọn)

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Khi đó CD vuông góc với AB.

3) Ta có $\triangle ACB$ và $\triangle ADB$ nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên

$$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow ADBC \text{ là hình chữ nhật.}$$

$$\text{Ta có: } CD^2 = AB^2 = AE \cdot AF$$

$$\Rightarrow CD^4 = AB^4 = AE^2 \cdot AF^2 = (EC \cdot EB) \cdot (DF \cdot BF) = (EC \cdot DF) \cdot (EB \cdot BF) = EC \cdot DF \cdot AB \cdot EF$$

$$\Rightarrow AB^3 = CE \cdot DF \cdot EF$$

$$\text{Vậy } CD^3 = CE \cdot DF \cdot EF$$

$$\text{Ta có: } \frac{BE^2}{BF^2} = \frac{EA \cdot EF}{FA \cdot EF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{CE \cdot BE}{DF \cdot BF} \Rightarrow \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}.$$

Câu 5. Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$

$$\Rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2 = n^4 + 2kn^2 + k^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n^3 - 2kn^2 = k^2 - 1 \Rightarrow n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0$$

$$\text{Mà } k^2 - 1 : n^2 \Rightarrow k^2 = 1 \text{ hoặc } n^2 \leq k^2 - 1$$

$$\text{Nếu } k^2 = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow n^2(n - 2) = 0 \Rightarrow n = 2$$

$$\text{Thử lại } 2^4 + 2^3 + 1 = 5^2 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Khi } k \neq 1 \Rightarrow k^2 > k^2 - 1 \geq n^2 \Rightarrow k > n$$

$$\Rightarrow n - 2k < 0 \text{ mâu thuẫn với điều kiện } n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0.$$

$$\text{Vậy } n = 2.$$

Đề số 49

Câu 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $p \leq q$.

Trường hợp 1: $p = 2$

$$\Rightarrow p(p+3) = 2(2+3) = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\Rightarrow 10 + q(q+3) = n(n+3)$$

$$\Leftrightarrow 10 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = (n^2 - q^2) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n - q)(n + q) + 3(n - q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n - q)(n + q + 3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà $p; q; n$ là các số nguyên dương

$$\Rightarrow n > q \geq 2.$$

$$\Rightarrow n + q + 3 > 2 + 2 + 3 = 7$$

$$\text{Mà } 10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ cần tìm là $(2; 3; 4)$.

Trường hợp 2: $p = 3$

$$\Rightarrow p(p+3) = 3.(3+3) = 3.6 = 18$$

$$\Rightarrow 18 + q(q+3) = n(n+3) \Leftrightarrow 18 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = (n^2 - q^2) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà $p; q; n$ là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \geq 3$.

$$\Rightarrow n+q+3 > 3+3+3 = 9$$

$$\text{Mà } 18 = 1.18 = 2.9 = 3.6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ cần tìm là $(3; 7; 8)$.

Trường hợp 3: $p > 3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

$$\text{Nếu } a:3 \text{ dư } 1 \Rightarrow a = 3k+1 \Rightarrow a+3 = 3k+4$$

$$\Rightarrow a(a+3) = (3k+1)(3k+4) = 9k^2 + 15k + 4 : 3 \text{ dư } 1.$$

$$\text{Nếu } a:3 \text{ dư } 2 \Rightarrow a = 3k+2 \Rightarrow a+3 = 3k+5$$

$$\Rightarrow a(a+3) = (3k+2)(3k+5) = 9k^2 + 21k + 10 : 3 \text{ dư } 1.$$

Trở lại bài toán chính:

$$\text{Vì } q \geq p > 3 \Rightarrow p \nmid 3; q \nmid 3.$$

$$\Rightarrow p(p+3) + q(q+3) : 3 \text{ dư } 2.$$

Mà $n(n+3) : 3$ dư 1 (nếu $n \nmid 3$) hoặc $n(n+3) : 3$ nếu $n : 3$.

$$\Rightarrow p(p+3) + q(q+3) \neq n(n+3)$$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Khi phân tích đa thức $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ ra thừa số ta được:

$$2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 2(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \frac{9}{2} \\ ab+bc+ca = 3 \\ abc = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 = \frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Tính $a^3 + b^3 + c^3$:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = \frac{9}{2} \left(\frac{57}{4} - 3 \right) + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{417}{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{9}{2} \\ ab+bc+ca = 3 \\ abc = \frac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \frac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3 = \frac{417}{8} \end{cases}$$

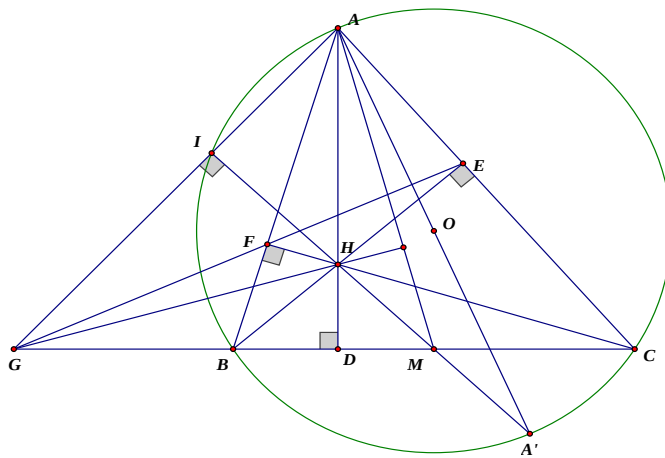
Khi đó ta có:

$$S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$$

$$\Leftrightarrow S = (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + (b^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + c^4) + (c^4 + c^3a + c^2a^2 + ca^3 + a^4)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow S = 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + a^3c + c^3a + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\
&\Leftrightarrow S = (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) + (a^4 + a^3b + a^3c) + (b^4 + b^3a + b^3c) \\
&\quad + (c^4 + c^3a + c^3b) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&\Leftrightarrow S = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^3(a+b+c) + b^3(a+b+c) + c^3(a+b+c) \\
&\quad - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&\Leftrightarrow S = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a^3 + b^3 + c^3)(a+b+c) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&\Leftrightarrow S = \left(\frac{57}{4}\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot \frac{417}{8} - \frac{9}{2} = \frac{3465}{8}
\end{aligned}$$

Câu 3.



1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

Dễ dàng chứng minh tứ giác $AIFH$ nội tiếp và tứ giác $AFHE$ nội tiếp

$\Rightarrow$ 5 điểm A, F, H, E, I cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

$\Rightarrow GI.GA = GF.GE$ (1).

Dễ dàng chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow GF.GE = GB.GC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $GI.GA = GB.GC \Rightarrow$ tứ giác $BCAI$ nội tiếp (điều phải chứng minh).

2. Chứng minh $GH \perp AM$.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Kẻ đường kính AA' của (O) .

Vì tứ giác $BCAI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow I \in (O) \Rightarrow AIA' = 90^\circ \Rightarrow A'I \perp AI$ hay $A'I \perp AG$.

Mà $HI \perp AG$ (giả thiết) $\Rightarrow A'I \equiv HI \Rightarrow A', I, H$ thẳng hàng.

Mà dễ dàng chứng minh được $A'H$ đi qua trung điểm M của BC (tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành).

$\Rightarrow M, I, H$ thẳng hàng.

Xét $\triangle AGM$ có: $AD \perp AM, MI \perp AG$ và AD cắt MI tại H .

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AGM .

$\Rightarrow GH \perp AM$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4. Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ thì ta

có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 9 = (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Trường hợp 2: $a > \frac{1}{3}; b > \frac{1}{3}; c > \frac{1}{3}$ ta có $a+b+c = 3 > a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a < \frac{7}{3}$ tương tự $b < \frac{7}{3}; c < \frac{7}{3}$. Vậy $a, b, c \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2} - x^2 \geq -4x + 4 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$. (*).

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow 1 - x^4 \geq -4x^3 + 4x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 - 2x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 ((x-1)^2 - 2) \leq 0 \text{ luôn đúng với } \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4; \frac{1}{b^2} - b^2 \geq -4b + 4; \frac{1}{c^2} - c^2 \geq -4c + 4.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - a^2 - b^2 - c^2 \geq -4(a+b+c) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 \text{ (đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 5. Giả sử không có 2 điểm nào trong mặt phẳng được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng là 1 đơn vị độ dài.

Xét một điểm O bất kỳ có màu vàng trên mặt phẳng.

Vẽ đường tròn $(O, \sqrt{3})$. Lấy một điểm P bất kỳ trên (O) .

Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và có đường chéo là OP .

Dễ thấy $OA=OB=AB=AC=BC=1$.

Theo giả thiết, A, B phải tô khác màu vàng và khác màu nhau.

Do đó P phải tô vàng. Từ đây suy ra tất cả các điểm trên (O) phải tô vàng. Điều này trái với giả thiết vì dễ thấy tồn tại hai điểm trên (O) có khoảng cách 1 đơn vị độ dài.

P/s: Số 1 có thể được thay bởi bất kỳ số thực dương nào.

Đề số 50

Phần trắc nghiệm.

Mỗi câu đúng cho 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4
Đáp án	D	A	C	D

Phần tự luận.

Câu 1.

a) Tính $A = \sqrt{6 - \sqrt{11}} - \sqrt{6 + \sqrt{11}}$

Nhận xét $A < 0$

$$A^2 = \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{11}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{11}} \right)^2 = 6 - \sqrt{11} + 6 + \sqrt{11} - 2\sqrt{(6 - \sqrt{11})(6 + \sqrt{11})}$$

$$= 12 - 2\sqrt{36 - 11} = 12 - 2.5 = 2$$

Suy ra $A = -\sqrt{2}$

(vì $A < 0$)

b) Rút gọn $P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right)$ (với $x \geq 0$; $x \neq 4$)

$$= \frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \left(x - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot (x-\sqrt{x}-2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \sqrt{x}-2$$

$$- P\sqrt{4-x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ (\sqrt{x}-2)\sqrt{4-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \sqrt{x} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp với điều kiện ta có $0 \leq x < 4$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2.

Điều kiện $x \geq -8$

$$\Leftrightarrow (4x+2) \cdot \sqrt{x+8} = 3x^2 + 7x + 8$$

$$\Leftrightarrow x+8-3x\sqrt{x+8}-(x+2)\sqrt{x+8}+3x(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+8}(\sqrt{x+8}-3x)-(x+2)(\sqrt{x+8}-3x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+8}-x-2)(\sqrt{x+8}-3x)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+8} = x+2 & (1) \\ \sqrt{x+8} = 3x & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (1) và tìm được $x = 1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Giải phương trình (2) và tìm được $x = 1$ là một nghiệm của phương trình đã cho

Kết luận: Phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 1$.

Câu 3.

a) Tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 1; y = 2$.

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại A (1; 2).

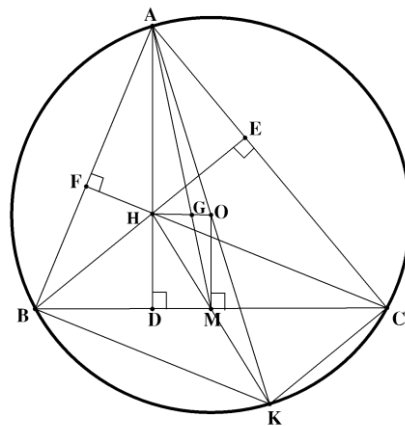
b) Ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm suy ra (d_3) đi qua A.

$$\Rightarrow m^2 - 1 + 3 \cdot 2 - 5 - 2m = 0 \Rightarrow m(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Với $m = 0$ thì (d_3) có dạng $x - 3y + 5 = 0$ trùng với (d_1) (loại)

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.



1) Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành

+ Vì $\triangle ACK$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AK nên $\triangle ACK$ vuông tại C

+ Suy ra $KC \perp AC$

Ta có $BE \perp AC$ (gt)

+ Suy ra $KC \parallel BE$ hay $KC \parallel BH$

+ Chứng minh tương tự ta có $KB \parallel CH$

+ Kết luận tứ giác BHCK là hình bình hành

2) Chứng minh 3 điểm H, M, K thẳng hàng

+ Chứng minh M là trung điểm của BC

+ Ta có tứ giác BHCK là hình bình hành (cmt). Suy ra 2 đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà M là trung điểm của BC (cmt)

Suy ra M cũng là trung điểm của HK

+ Suy ra 3 điểm H, M, K thẳng hàng

Chứng minh $S_{AHG} = 2S_{AGO}$

+ Vì M là trung điểm của BC (cmt). Suy ra AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$

+ $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm (gt)

Suy ra G thuộc đoạn AM, $AG = \frac{2}{3} AM$

+ Vì M là trung điểm của HK (cmt)

Suy ra $\triangle AHK$ có AM là đường trung tuyến. Mà G thuộc đoạn AM, $AG = \frac{2}{3} AM$

(cmt). Suy ra G là trọng tâm của $\triangle AHK$

+ Chứng minh HO đi qua G, $HG = 2GO$

+ $\triangle AHG$ và $\triangle AGO$ có chung đường cao kẻ từ A đến HO, $HG = 2GO$

Do đó $S_{AHG} = 2S_{AGO}$

2) Chứng minh $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} &= \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} + \frac{\frac{1}{2}HE \cdot AC}{\frac{1}{2}BE \cdot AC} + \frac{\frac{1}{2}HF \cdot AB}{\frac{1}{2}CF \cdot AB} \\ &= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \end{aligned}$$

+ Chứng minh bài toán phụ:

Cho $x > 0, y > 0, z > 0$. Chứng minh rằng $x + y + z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$

Ta có:

$$\begin{aligned} x + y + z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \\ &= 3 + \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{x^2 + z^2}{xz} + \frac{z^2 + y^2}{zy} \\ &= 3 + \frac{x - y^2 + 2xy}{xy} + \frac{z - x^2 + 2xz}{zx} + \frac{z - y^2 + 2yz}{yz} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 + \frac{x - y^2}{xy} + \frac{z - x^2}{zx} + \frac{z - y^2}{yz} \geq 9 \end{aligned}$$

(Vì với $x > 0, y > 0, z > 0$ thì $\frac{x-y^2}{xy} \geq 0; \frac{z-x^2}{zx} \geq 0; \frac{z-y^2}{yz} \geq 0$)

Cách 2: Sử dụng $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ suy ra

$$x+y+z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \dots\dots$$

+ Áp dụng kết quả bài toán trên ta có

$$\left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right) \cdot \left(\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \right) \geq 9. \text{ Mà } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1 \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$$

Câu 5.

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}; y \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} + \sqrt{y})^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{y} (*)$$

Thay vào (2)

$$\sqrt{3y+4} - \sqrt{2y+1} - 2(\sqrt{y}-2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3y+4} - 4) - (\sqrt{2y+1} - 3) - 2(\sqrt{y} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y+4-16}{\sqrt{3y+1}+4} - \frac{2y+1-9}{\sqrt{2y+1}+3} - 2 \cdot \frac{y-4}{\sqrt{y}+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-4) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3y+1}+4} - \frac{2}{\sqrt{2y+1}+3} - \frac{2}{\sqrt{y}+2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-4=0 \\ \frac{3}{\sqrt{3y+1}+4} = \frac{2}{\sqrt{2y+1}+3} + \frac{2}{\sqrt{y}+2} \end{cases} \quad (3)$$

Với $y = 4$ ta có $x = 1$

Với $y \geq 0$ ta có $\frac{3}{\sqrt{3y+1}+4} \leq \frac{1}{2}$

Từ (*) suy ra $y \leq 9$ suy ra $\frac{2}{\sqrt{2y+1}+3} + \frac{2}{\sqrt{y}+2} > \frac{1}{2}$. Vậy phương trình (3) vô nghiệm

Kết luận nghiệm của hệ $(x;y) = (1; 4)$

