

Câu 1. (1,5 điểm) Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75}$.

2) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{20}$.

3) $\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x-1} = 2$.

2) $\frac{1}{2}\sqrt{16x-32} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} + \sqrt{25x-50} = 6$.

3) $\sqrt{3-x} = 2x-3$.

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hai biểu thức

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \text{ và } P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3x-3}{9-x} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9.$$

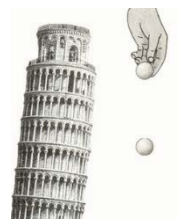
1) Tính giá trị của Q tại $x=16$.

2) Chứng minh rằng: $P = \frac{3\sqrt{x}+3}{x-9}$.

3) Tìm x là số nguyên để $M = \frac{P}{Q}$ là số nguyên.

4) Cho $A = x.M + \frac{4x+7}{\sqrt{x}+3}$. Tìm GTNN của A .

Câu 4. (1,0 điểm) Tháp Pisa ở Ý là một trong những địa điểm du lịch rất nổi tiếng. Năm 2019 tòa tháp trong 864 tuổi và người ta đo được độ nghiêng của tháp so với phương thẳng đứng là $3^\circ 58'$. Khi thả một quả cầu bằng đá rơi theo phương thẳng đứng từ đỉnh tháp (bỏ qua lực cản không khí, gió), người ta đo được điểm rơi cách chân tháp 3,92 m. Tính khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt đất? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Câu 5. (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$.

1) Tính độ dài BC, AH, CH, BH .

2) Gọi M là trung điểm của BC . Kẻ $BE \perp AM$ tại E . BE cắt AH tại D , BE cắt AC tại F . Chứng minh $BE.BF = BH.BC$.

3) Chứng minh: $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$ và D là trung điểm của BF .

Câu 6. (0,5 điểm) Giải phương trình: $3\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x-2)} + 7$.

❧ HẾT ❧

Câu 1.

$$1) \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75} = \sqrt{3^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4^2 \cdot 3} - 3\sqrt{5^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3}.$$

$$2) \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{20} = |\sqrt{5}-2| - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{5}-2 - \sqrt{5} = -2.$$

$$3) \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \left[\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} \right] \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = 5-2 = 3.$$

Câu 2.

$$1) \sqrt{x-1} = 2 \quad (\text{Điều kiện: } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{5\}$

$$2) \frac{1}{2}\sqrt{16x-32} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} + \sqrt{25x-50} = 6$$

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2}\sqrt{4^2(x-2)} - \frac{1}{3}\sqrt{3^2(x-2)} + \sqrt{5^2(x-2)} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{x-2} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x-2} + 5\sqrt{x-2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} + 5\sqrt{x-2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$

$$3) \sqrt{3-x} = 2x-3 \quad \text{Điều kiện: } x \leq 3.$$

PT tương đương:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 3-x = (2x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 3-x = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$.

Câu 3.

1) Thay $x = 16$ (TMĐK) vào biểu thức Q , ta có: $Q = \frac{\sqrt{16+1}}{\sqrt{16-3}} = \frac{5}{1} = 5$.

Vậy $Q = 5$ tại $x = 16$.

$$2) P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3x-3}{9-x} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 3x+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}+3}{x-9}.$$

$$3) \text{ Ta có: } M = \frac{P}{Q} = \frac{3\sqrt{x}+3}{x-9} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Với mọi } x \text{ thỏa mãn ĐKXD: } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq 1$$

Ta có: $0 < M \leq 1$ mà M nguyên nên $M = 1$

$$\text{Suy ra: } \frac{3}{\sqrt{x}+3} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x = 0$ thì M nhận giá trị nguyên.

$$4) A = x.M + \frac{4x+7}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = x \cdot \frac{3}{\sqrt{x}+3} + \frac{4x+7}{\sqrt{x}+3} = \frac{7x+7}{\sqrt{x}+3} = 7\sqrt{x} - 21 + \frac{70}{\sqrt{x}+3} = 7(\sqrt{x}+3) + \frac{70}{\sqrt{x}+3} - 42$$

Do $\sqrt{x} + 3 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$ nên Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$A \geq 2\sqrt{7 \cdot 70} - 42 \Rightarrow A \geq 14\sqrt{10} - 42$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 7(\sqrt{x} + 3) = \frac{70}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow x = 19 - 6\sqrt{10}.$$

Câu 4.

Ta có mô tả như hình vẽ bên.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C có:

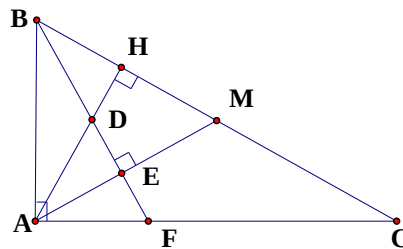
$$\sin A = \frac{BC}{AB} \text{ Hay } \sin 3^\circ 58' = \frac{3,92}{AB}$$

$$\text{Suy ra: } AB = 56,67$$

Vậy khoảng cách từ đỉnh tháp tới mặt đất là 56,67 m.



Câu 5. (



1) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A; đường cao AH

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ cm}.$$

$$AC^2 = HC \cdot BC \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow HB = BC - HC = 5 - 3,2 = 1,8 \text{ cm}.$$

2) Gọi M là trung điểm của BC. Kẻ $BE \perp AM$ tại E. BE cắt AH tại D, BE cắt AC tại F. Chứng minh $BE \cdot BF = BH \cdot BC$.

Xét tam giác vuông ABF, đường cao AE ta có: $AB^2 = BE \cdot BF$ (1)

Xét tam giác vuông ABC, đường cao AH ta có: $AB^2 = BH \cdot BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE \cdot BF = BH \cdot BC$.

3) Chứng minh : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$ và D là trung điểm của BF .

Xét tam giác vuông ABC , đường cao AH ta có: $AB^2 = BH.BC$ (1)

Xét tam giác vuông ABC , đường cao AH ta có: $AC^2 = CH.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A , có đường trung tuyến $AM \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = MC$

$\Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C}$ (3)

Ta lại có: $\widehat{MAC} = \widehat{FBA}$ (cùng phụ $\widehat{BAE}$) (4)

$\widehat{C} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$) (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $\widehat{BAH} = \widehat{FBA}$ hay $\widehat{BAD} = \widehat{DBA}$

Suy ra: $\triangle ABD$ cân tại $D \Rightarrow DA = DB$ (6)

Ta lại có: $\widehat{FAD} = \widehat{DFA}$ (cùng phụ 2 góc bằng nhau $\widehat{BAD} = \widehat{DBA}$)

Suy ra: $\triangle AFD$ cân tại $D \Rightarrow DA = DF$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra: $DB = DF$.

Suy ra : D là trung điểm của BF . (đpcm)

Câu 6.

Đkxd: $x \geq 2$.

$$3\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x-2)} + 7$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x} = 2x - 2\sqrt{7(x-2)} + 14$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{7(x-2)} + 14 - 6\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 9 + x - 2 - 2\sqrt{7(x-2)} + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 + (\sqrt{x-2} - \sqrt{7})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x - 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9 \text{ (tm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x = 9$.

☞ HẾT ☞