SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM HỌC 2024-2025

Môn chuyên: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 *(1,5 điểm)*

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0$ và $x\neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A<-\dfrac{8}{5}$.

b) Cho a, b là các số hữu tỉ. Chứng minh $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ là số hữu tỉ.

Câu 2 *(1,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-4mx-3=0$ có hai nghiệm nguyên phân biệt.

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3=2b^4+a^2b$. Chứng minh a chia hết cho b.

Câu 3 *(2,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;\, q)$ sao cho $p^2+q^2+4pq+52$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\, y)$ sao cho $5^x-1=4y^4$.

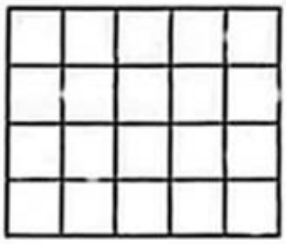
Câu 4 *(1,0 điểm)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$.

a) Chứng minh $4ab+ac+bc\geq 4abc$.

b) Chứng minh $\dfrac{2a}{4a+bc}+\dfrac{2b}{4b+ac}+\dfrac{3c}{4c+ab}\leq\dfrac{4}{3}$.

Câu 5 *(1,0 điểm)*



Cho một bảng 4×5 ô vuông gồm 4 hàng và 5 cột (như hình vẽ bên). Ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 20 vào các ô, mỗi ô chứa đúng một số và các số ở mỗi ô là khác nhau. Gọi d_i với $i\in\{1;\, 2;\, 3;\, 4\}$ là hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở hàng thứ i. Gọi D là giá trị lớn nhất trong các giá trị d_1, d_2, d_3, d_4. Ta gọi D là *"độ lệch"* của bảng.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi để $D=4$.

b) Hãy chỉ ra một cách ghi để $d_1=d_2=d_3=d_4=5$.

c) Với mỗi cách ghi bất kì, ta tiến hành sắp xếp lại các số trong bảng theo quy luật: ở mỗi cột, các số được xếp giảm dần (số trên cùng là lớn nhất, số dưới cùng là nhỏ nhất). Chứng minh sau khi sắp xếp lại thì *"độ lệch"* của bảng mới không lớn hơn *"độ lệch"* của bảng cũ.

Câu 6 *(3,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC có $BC<AB<AC$. Gọi BD, CE là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm P (P khác H và C), M là điểm trên cạnh AC sao cho tia BD là phân giác của góc MBP. Gọi N là điểm đối xứng với B qua E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC cắt BM tại K (K khác M).

a) Chứng minh $BHKN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BKP.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh I, K, H thẳng hàng.

—————— **HẾT** ——————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: .... Chữ ký của cán bộ coi thi 2: ....

Đáp án tham khảo
Đề chuyên Toán vào 10, Thừa Thiên Huế
Ngày 03/06/2024

Nguyễn Duy Phước[1] & Trần Đăng Đạt[2] & Lê Trung Tấn Huy[3] & Nguyễn Thái An[4]

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Cho biểu thức

$$A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

với $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A < -\frac{8}{5}$.

b) Cho a, b là các số hữu tỉ. Chứng minh rằng $\sqrt{(a^2 + b^2)(a - b)^2 + a^2 b^2}$ là số hữu tỉ.

Lời giải.

a) Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \\
&= \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(3\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{15\sqrt{x} - 11 - (3x + 7\sqrt{x} - 6) - (2x + \sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
&= \frac{-5x + 7\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} - 1)(-5\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
&= \frac{-5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}
\end{aligned}$$

Để $A < \dfrac{-8}{5} \Longleftrightarrow \dfrac{-5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} < \dfrac{-8}{5} \Longleftarrow -25\sqrt{x} + 10 < -8\sqrt{x} - 24$ (do $\sqrt{x} + 3 > 0$)
Suy ra: $\sqrt{x} > 2 \Longleftrightarrow x > 4$

[1] Sinh viên khoa Toán ĐHSP Huế
[2] Học sinh lớp 10 Toán, THPT chuyên Quốc Học Huế
[3] Học sinh lớp 9, THCS Nguyễn Tri Phương Huế
[4] Giảng viên khoa Toán ĐHSP Huế

b) Ta có: $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2} = \sqrt{a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4} = \sqrt{(a^2-ab+b^2)^2} = |a^2-ab+b^2|$

Do a, b hữu tỉ nên a^2, ab, b^2 hữu tỉ, suy ra $|a^2-ab+b^2|$ hữu tỉ.

Vậy $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ hữu tỉ.

■

Câu 2 (1.5 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-4mx-3=0$ có hai nghiệm nguyên phân biệt.

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 = 2b^4 + a^2b$. Chứng minh a chia hết cho b.

Lời giải.

a) Phương trình $x^2-4mx-3=0$ là phương trình bậc hai theo x có biệt thức

$$\Delta' = (-2m)^2 + 3 = 4m^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

PT luôn có hai nghiệm (thực) phân biệt $x_1 = 2m - \sqrt{4m^2+3}$ và $x_2 = 2m + \sqrt{4m^2+3}$. Do $x_1 + x_2 = 4m$ nên để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ thì $m = \frac{a}{4}$ với $a \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$x_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+12}}{2}, \quad x_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+12}}{2}.$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên điều kiện cần để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ là $12 + a^2$ là số chính phương (vì căn bậc hai của một số tự nhiên là số tự nhiên hoặc số vô tỉ). Suy ra, tồn tại số nguyên dương b sao cho

$$12 + a^2 = b^2 \iff (a-b)(a+b) = -12.$$

Do $a - b < a + b$ và $(a-b) + (a+b) = 2a$ là số chẵn nên suy ra

$$\begin{cases} a-b &= -6 \\ a+b &= 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a-b &= -2 \\ a+b &= 6. \end{cases}$$

Suy ra, $a = -2, b = 4$ hoặc $a = 2, b = 4$. Như thế, $4m \in \{-2, 2\}$ nên $m \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Thử lại, với $m = -\frac{1}{2}$ thì PT có 2 nghiệm nguyên là 1 và -3. với $m = \frac{1}{2}$ thì PT có 2 nghiệm nguyên là -1 và 3.

b) Trước hết, ta sẽ chứng minh a và b cùng tính chẵn lẻ. Thật vậy, nếu a là số lẻ thì dễ dàng chứng minh được b cũng là số lẻ. Nếu a là số chẵn thì từ $2b^4 = a^2(a-b) \vdots 4$ ta thu được b là số chẵn.

Ta có $a^3 = 2b^4 + a^2b = b(2b^3 + a^2)$ nên a^3 chia hết cho b. Ngoài ra, do $\frac{a-b}{2} = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$ và a, b cùng tính chẵn lẻ nên $b^2 \vdots a$. Vì vậy a và b có cùng tập ước nguyên tố, giả sử đó là $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Đặt

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}, b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n},$$

trong đó α_i, β_i là các số nguyên dương.
Ta có

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{3\alpha_i} = a^3 = 2b^4 + a^2b = 2\prod_{i=1}^{n} p_i^{4\beta_i} + \prod_{i=1}^{n} p_i^{2\alpha_i+\beta_i}. \quad (1)$$

Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $\alpha_i < \beta_i$, chia hai vế của đẳng thức (1) cho $p_i^{3\alpha_i}$,

$$\prod_{1\leq j\leq n, j\neq i} p_j^{3\alpha_j} = 2p_i^{4\beta_i-3\alpha_i} \prod_{1\leq j\leq n, j\neq i} p_j^{4\beta_j} + p_i^{\beta_i-\alpha_i} \prod_{1\leq j\leq n, j\neq i} p_j^{2\alpha_j+\beta_j}. \quad (2)$$

Ta nhận thấy vế trái của (2) không chia hết cho p_i, trong khi đó vế phải của (2) chia hết cho p_i (do $\beta_i > \alpha_i$). Từ đó, ta có điều mâu thuẫn. Vì vậy $\alpha_i \geq \beta_i$, với mọi $i = \overline{1, n}$.
Vậy a chia hết cho b.

■

Câu 3 (1.0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 4pq + 52$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $5^x - 1 = 4y^4$.

Lời giải.

a) Giả sử trong hai số p, q không có số nào bằng 2, khi đó do p, q là các số nguyên tố nên p, q lẻ, do đó $p^2 \equiv 1 \pmod 4$, $q^2 \equiv 1 \pmod 4$, cho nên $p^2 + q^2 + 4pq + 52 \equiv 2 \pmod 4$ không thể là số chính phương, vì số chính phương chia 4 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1. Do đó phải có một số bằng 2, giả sử đó là p.

Khi đó $q^2+8q+56$ là số chính phương, đặt $q^2+8q+56 = t^2$ ($t \in \mathbb{N}$). Suy ra $(t-q-4)(t+q+4) = 40$. Vì vậy, $t-q-4$ và $t+q+4$ đều là ước của 40, hơn nữa $t-q-4 < t+q+4$ và $t-q-4, t+q+4$ cùng tính chẵn lẻ. Xét bảng sau

$t-q-4$	-20	-10	2	4
$t+q+4$	-2	-4	20	10
t	-11	-7	11	7
q	5	-1	5	-1
	(loại)	(loại)	(chọn)	(loại)

Vậy $(p, q) \in \{(2; 5), (5; 2)\}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
& 5^x - 1 = 4y^4 \\
\iff\ & 5^x = 4y^4 + 1 \\
\iff\ & 5^x = (2y^2+1)^2 - (2y)^2 \\
\iff\ & 5^x = (2y^2-2y+1)(2y^2+2y+1).
\end{aligned}$$

Do đó
$$\begin{cases} 2y^2 - 2y + 1 = 5^a \\ 2y^2 + 2y + 1 = 5^b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{N}, a < b, a + b = x).$$

Suy ra $(2y^2 - 2y + 1) \mid (2y^2 + 2y + 1) \qquad (1)$.
Hay $2y^2 - 2y + 1 \mid 4y$. Thử với $y = 1, 2, 3$ được cặp $(x, y) = (1, 1)$ thỏa mãn. Với $y > 3$ thì $4y - (2y^2 - 2y + 1) = -2y(y - 4) - 1 < 0$, mà $2y^2 - 2y + 1, 4y$ đều dương nên $(2y^2 - 2y + 1) \nmid 4y$, mâu thuẫn (1).
Vậy $(x, y) = (1, 1)$.

■

Câu 4 (2 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$.

a) Chứng minh rằng $4ab + ac + bc \geq 4abc$.

b) Chứng minh $\dfrac{2a}{4a + bc} + \dfrac{2b}{4b + ac} + \dfrac{3c}{4c + ab} \leq \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

a) Ta có
$$\begin{aligned} & 4ab + ac + bc \geq 4abc \\ \iff \quad & \frac{4}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq 4 \end{aligned}$$

Mà $VT \geq \dfrac{(2 + 1 + 1)^2}{a + b + c} = 4 = VP$ (đpcm).

b) Cần chứng minh:
$$\begin{aligned} & \frac{2a}{4a + bc} + \frac{2b}{4b + ac} + \frac{3c}{4c + ab} \leq \frac{4}{3} \\ \iff \quad & \frac{2a}{(a + b + c)a + bc} + \frac{2b}{(a + b + c)b + ac} + \frac{3c}{(a + b + c)c + ab} \leq \frac{4}{3} \\ \iff \quad & \frac{2a(b + c) + 2b(a + c) + 2c(a + b)}{(a + c)(b + c)(a + b)} \leq \frac{4}{3} \\ \iff \quad & \frac{5ac + 5bc + 4ab}{(a + c)(b + c)(a + b)} \leq \frac{4}{3} \\ \iff \quad & 15ac + 15bc + 12ab \leq 4(a + c)(b + c)(a + b) \\ \iff \quad & 0 \leq 4(4 - a)(4 - b)(4 - c) - (15ac + 15bc + 12ab) \\ \iff \quad & 0 \leq -4abc + 4ab + ac + bc - 64(a + b + c) + 256 \\ \iff \quad & 4abc \leq 4ab + ac + bc. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đã được chứng minh ở câu (a).
Dấu bằng xảy ra khi $(a, b, c) = (1, 1, 2)$

■

Câu 5 (1 điểm) Cho một bảng 4×5 ô vuông gồm 4 hàng và 5 cột. Ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 20 vào các ô, mỗi ô chứa đúng một số và các số ở mỗi ô là khác nhau. Gọi d_i với $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ là hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở hàng thứ i. Gọi D là giá trị lớn nhất trong các giá trị d_1, d_2, d_3, d_4. Ta gọi D là *độ lệch* của bảng.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi để $D = 4$.

b) Hãy chỉ ra mọt cách ghi để $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$.

c) Với mỗi cách ghi bất kỳ, ta tiến hành sắp xếp laijc ác số trong bảng theo quy luật: ở mỗi cột, các số được sắp xếp giảm dần (số trên cùng là lớn nhất, số dưới cùng là nhỏ nhất). Chứng minh sau khi sắp xếp lại thì độ lệch của bảng mới không lớn hơn độ lệch của bảng cũ.

Lời giải.

a) Dễ thấy, bảng sau có $D = 4$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{array}$$

b) Dễ thấy, bảng sau có $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 16 \\ 15 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{array}$$

c) Ta đánh số của bảng ban đầu như sau:

$$\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_5 \\ b_6 & b_7 & \dots & b_{10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{16} & b_{17} & \dots & b_{20} \end{array}$$

Sau khi sắp xếp lại bảng, ta có bảng như sau:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_5 \\ a_6 & a_7 & \dots & a_{10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{16} & a_{17} & \dots & a_{20} \end{array}$$

Gọi d'_i là hiệu số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng i ở bảng ban đầu; d_i là hiệu số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng i ở bảng lúc sau; $D' = \max\{d'_i\}$, với $i = 1, 2, 3, 4$; $D = \max\{d_i\}$, với $i = 1, 2, 3, 4$.

Giả sử hàng j có d_j lớn nhất ở bảng lúc sau, gọi hai số lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là a_l và a_k. Không mất tính tổng quát, ta cố định cột chứa số lớn nhất của hàng j (cột chứa số a_l) và xếp lại vị trí của các số còn lại sao cho giống với ban đầu.

Khi đó, giả sử số a_k được thay vị trí bởi số b_k. Do sự sắp xếp chỉ diễn ra trên cùng một cột nên a_k với b_k cùng cột.

Nếu $b_k < a_k$ thì $a_l - a_k < a_l - b_k$. Suy ra $d_j = a_l - a_k < a_l - b_k \leq d'_j \leq D'$.

Nếu $b_k > a_k$. Giả sử b_k cùng hàng với b_l mà b_l cùng cột với a_l, ta có $b_l > a_l > a_k$. Gọi d'_l là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng chứa b_l, ta có: $d_j = a_l - a_k < b_l - a_k \leq d'_l \leq D'$

Nếu a_k giữ nguyên vị trí thì $a_l - a_k = d_j = d'_j \leq D'$.

Vậy nếu hàng j có d_j lớn nhất thì $d_j \leq D'$. Điều này cho thấy $D \leq D'$.

■

Câu 6 (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $BC < AB < AC$. Gọi BD, CE là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm P (P khác H và C), M là điểm trên cạnh AC sao cho tia BD là phân giác của góc MBP. Gọi N là điểm đối xứng với B qua E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC cắt BM tại K (K khác M).

a) Chứng minh $BHKN$ nội tiếp.

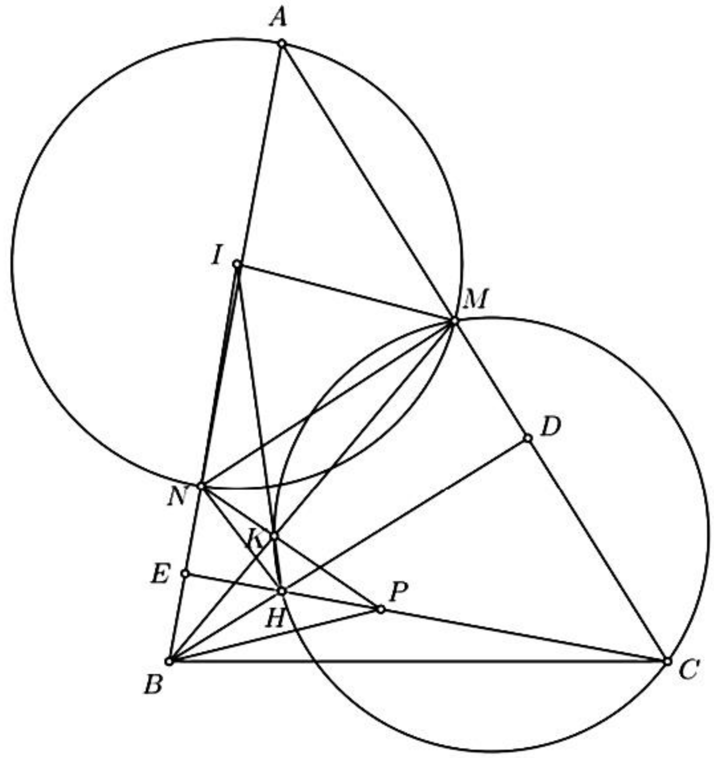
b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BKP.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh I, K, H thẳng hàng.

Lời giải.

a) Ta có $\widehat{BNH} = \widehat{NBH} = \widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{MCH} = \widehat{BKH}$. Suy ra tứ giác $BHKN$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{KHP} = \widehat{KHC} = 180^\circ - \widehat{KMC} = 180^\circ - \widehat{BMD}$. Mặt khác, $\frac{\widehat{KBP}}{2} = \widehat{KBH} = \widehat{MBD}$. Suy ra $\widehat{KHP} - \frac{\widehat{KBP}}{2} = 180^\circ - \widehat{BMD} - \widehat{MBD} = 90^\circ$ hay $\widehat{KHP} = 90^\circ + \frac{\widehat{KBP}}{2}$. Kết hợp với BH là phân giác của góc $\widehat{KBP}$, ta thu được H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BKP.



c) Vì H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BKP nên PH là tia phân giác của góc $\widehat{KPB}$. Hay nói cách khác, đường thẳng PK và PB đối xứng với nhau qua CH. Kết hợp với N và B đối xứng nhau qua HC, ta thu được ba điểm P, K, N thẳng hàng.

Ta có $\widehat{MKN} = \widehat{BKP} = 90^\circ + \frac{\widehat{BHP}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{BHC}}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{MAN}}{2} = 180^\circ - \widehat{MIN}$. Do đó tứ giác $MINK$ nội tiếp.

Cuối cùng, $\widehat{IKN} = \widehat{IMN} = 90^\circ - \widehat{MAN} = 90^\circ - \widehat{BAD} = \widehat{ABD} = \widehat{NBH} = 180^\circ - \widehat{NKH}$. Vì vậy ba điểm I, K, N thẳng hàng.

■

Nhận xét. Đây là một câu hình hay với ý tưởng chủ yếu biến đổi góc. Vấn đề đặt ra không quá khó nhưng có thể "giữ chân" một số bạn do yếu tố thời gian và tâm lý. Tuy nhiên, điểm E trong bài toán này dường như không có vai trò gì hết.

===== HẾT =====