

Câu 1. (4.0 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$; Chứng minh rằng: $A > 6$, với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định.

2. Cho ba số thực a, b, c khác không thỏa mãn $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -2$.

Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

Câu 2. (4.0 điểm)

1. Giải phương trình ẩn x: $x^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{(x+3)(x^2 + 2x + 2)}$.

2. Tìm cặp số (x; y) đồng thời thỏa mãn 2 đẳng thức (1), (2) sau đây:

$$x^2 + xy + x + 3 = 0 \quad (1), \quad x^2 + 2\sqrt{x^2y + 2y} + 2 = 3y \quad (2)$$

Câu 3. (4.0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn: $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$.

2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ đều là các số nguyên tố.

Câu 4. (6.0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. EF là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho E thuộc cung AF và $EF = \frac{AB}{2}$. Gọi H là giao điểm của AF, BE, C là giao điểm của AE, BF, I là giao điểm của CH, AB.

1. Chứng minh rằng tam giác ACI và tam giác ABE đồng dạng với nhau.

2. Đường thẳng AF cắt tiếp tuyến tại B ở N, các tiếp tuyến tại A, F của (O) cắt nhau ở M.

Chứng minh: $ON \perp MB$.

3. Xác định vị trí EF trên nửa đường tròn để tứ giác ABEF có diện tích lớn nhất.

Câu 5. (2.0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a.b.c = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

----- HẾT -----

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm