

Câu 1: (2 điểm) Cho $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$, không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị của biểu thức:

$$C = \sqrt[3]{4x^4 + 4x^3 + 19x^2 + 20x + 3} + \frac{x\sqrt{2}-1}{\sqrt{2x(x+1)}}.$$

Câu 2: (4 điểm)

2.1. (2 điểm) Chứng minh rằng không tồn tại cặp x nguyên, y nguyên nào thỏa mãn:

$$4x^2 + 9y^2 = 1987 + 13xy.$$

2.2. (2 điểm) Cho A là một số chính phương có 4 chữ số. Nếu cộng thêm vào mỗi chữ số của A với 3 ta được số chính phương B cũng có 4 chữ số. Tìm A , giải thích cách làm.

Câu 3: (4 điểm)

3.1. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x(x^2 - x + 2)} = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x-1}$.

3.2. (2 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 4y + 4 = 7xy \\ \frac{36x^2}{(y+1)^2} + \frac{9y^2}{(x+2)^2} = 8 \end{cases}$$

Câu 4: (2 điểm) Cho x, y là các số dương thỏa $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (x+2)(y+2).$$

Câu 5: (4 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm A sao cho $OA = 2R$. Gọi B, C lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn đường kính OA . Đường thẳng Ax không trùng AO cắt (O) tại D và E ($AD < AE$). Gọi F là trung điểm của DE . Chứng minh rằng:

5.1. (2 điểm) $FB + FC = FA$.

5.2. (2 điểm) Nếu $FB < FC$ thì $FB < BD$.

Câu 6: (4 điểm) Tam giác nhọn ABC có $\angle ABC = 60^\circ$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng $Ox \perp AO$ cắt AC, AB lần lượt tại D và E .

6.1. (2 điểm) Chứng minh 4 điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

6.2. (2 điểm) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ODC theo R .