

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn kiểm tra: Toán

Ngày thi: 13/09/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (5,0 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 - \dots - 1997 - 1998 + 1999 + 2000.$

b) $B = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021 \cdot 2023}\right).$

Bài 2. (5,0 điểm)

a) So sánh hai biểu thức A và B biết $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}.$

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}.$

Bài 3. (5,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên x biết $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+100} = 2^{101} - 1.$

b) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Bài 4. (3,0 điểm)

a) Trên một mặt phẳng cho 8 điểm phân biệt, trong đó có 5 điểm thẳng hàng. Cứ nối 3 điểm phân biệt không thẳng hàng sẽ tạo thành một tam giác, hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành khi nối các điểm từ 8 điểm trên.

b) Cho một đường tròn, trên đường tròn lấy 2023 chấm đỏ và 2024 chấm xanh. Người ta viết số 1 vào giữa hai chấm đỏ, viết số -1 vào giữa hai chấm xanh, và viết số 0 vào giữa hai chấm khác màu. Hỏi tổng các số trên đường tròn bằng bao nhiêu?

Bài 5. (2,0 điểm) Cho k là một số tự nhiên khác 0, chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên có dạng $1011^k - 1$ chia hết cho 2023.

---HẾT---

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh: Phòng:

Đáp án

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) (2,5 điểm)

$$A = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 - \dots - 1997 - 1998 + 1999 + 2000$$

$$A = (-1 - 2 + 3 + 4) + (-5 - 6 + 7 + 8) + (-9 - 10 + 11 + 12) + \dots + (-1997 - 1998 + 1999 + 2000)$$

Ta có tổng A có 2000 số hạng nên có $2000 : 4 = 500$ nhóm

$$A = 4 + 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (tổng có 500 số 4)}$$

$$A = 4 \cdot 500$$

$$A = 2000$$

b) (2,5 điểm)

$$B = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$$

$$= \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{2022^2}{2021.2023}$$

$$= \frac{(2.3.4 \dots 2022) \cdot (2.3.4 \dots 2022)}{(1.2.3 \dots 2021) \cdot (3.4.5 \dots 2023)}$$

$$= \frac{2022.2}{2023} = \frac{4044}{2023}$$

Bài 2:

a) (2,5 điểm)

$$\text{So sánh hai biểu thức } A \text{ và } B \text{ biết: } A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}, B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}.$$

Ta có:

$$10A = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}.$$

$$10B = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}.$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1} \text{ nên } 10A > 10B.$$

Suy ra: $A > B$.

b) (2,5 điểm)

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

$$\text{Đặt: } A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \text{ (1,25 điểm)}$$

$$* A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}. \quad (1,25 \text{ điểm})$$

Bài 3:

a) (2,5 điểm) Đặt:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+100} = 2^{101} - 1$$

$$A = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+100} = 2^{x+101} - 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{x+101} - 2^x = 2^{101} - 1 \quad (1,5 \text{ điểm})$$

$$\Rightarrow (2^x - 1)(2^{101} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 1) = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

b) (2,5 điểm)

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Với p không chia hết cho 2 $\Rightarrow (p-1), (p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1):8$

(1,5 điểm)

Mặt khác p không chia hết cho 3 nên $p = 3k + 1, p = 3k + 2$

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow (p-1):3 \Rightarrow (p-1)(p+1):24 \quad (0,5 \text{ điểm})$

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow (p+1):3 \Rightarrow (p-1)(p+1):24 \quad (0,5 \text{ điểm})$

Bài 4:

a) (1,5 điểm)

Trên một mặt phẳng cho 8 điểm phân biệt, trong đó có 5 điểm thẳng hàng. Cứ 3 điểm phân biệt sẽ tạo thành một tam giác, hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ 8 điểm trên.

Ta có:

Số tam giác tạo từ 3 điểm không thẳng hàng là 1

Số tam giác tạo từ 2 điểm không thẳng hàng và 1 điểm trên đường thẳng là $3.5=15$

Số tam giác tạo từ 1 điểm ngoài đường thẳng và 2 điểm trên đường thẳng là $10.3=30$

Vậy tổng có 46 tam giác.

b) (1,5 điểm)

Cho một đường tròn, trên đường tròn lấy 2023 chấm đỏ và 2024 chấm xanh. Người ta viết số 1 vào giữa hai chấm đỏ, viết số -1 vào giữa hai chấm xanh, và viết số 0 vào giữa hai chấm khác màu. Hỏi tổng các số trên đường tròn bằng bao nhiêu?

Dễ dàng nhận thấy số lượng chấm đỏ bên cạnh chấm xanh = số lượng chấm xanh bên cạnh chấm đỏ

Vì vậy số lượng 2 chấm xanh cạnh nhau luôn luôn lớn hơn số lượng 2 chấm đỏ cạnh nhau là $2024 - 2023 = 1$

Vậy tổng các số trên đường tròn là -1

Bài 5: (2,0 điểm) Cho k là một số tự nhiên khác 0, chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên có dạng $1011^k - 1$ chia hết cho 2023.

Ta thấy 1011 và 2023 là 2 số nguyên tố cùng nhau

Vì vậy các số có dạng $1011^1, 1011^2, \dots, 1011^{2024}$ không chia hết cho 2023

Theo nguyên lí Dirichlet trong 2014 số sẽ tồn tại ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 2023 là 1011^m và 1011^{m+k}

Khi đó $1011^{m+k} - 1011^m = 1011^m \cdot (1011^k - 1)$ chia hết cho 2023

Do 1011^m không chia hết cho 2023, nên tồn tại một số tự nhiên k để $1011^k - 1$ chia hết cho 2023.