

ĐỀ BÀI

Bài 1 (4 điểm):

- 1) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq 3\sqrt{2}.$$

- 2) Cho các số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Bài 2 (4 điểm):

- 1) Cho $x = \sqrt[3]{8+\sqrt{37}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$. Tính giá trị biểu thức: $T = \frac{x^4 - x^3 + 14x^2 - 7x + 16}{x^4 + x^3 + 2x^2 - 25x - 16}$.

- 2) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn:

$$x(x^{2023} + y^{2023}) = y(y^{2023} + z^{2023}) = z(z^{2023} + x^{2023}).$$

Chứng minh rằng: $x = y = z$.

Bài 3 (5 điểm):

- 1) Giải phương trình: $4(x+1) - (x+3)\sqrt{2x-1}$.

- 2) Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $T = \sqrt{19 + x^2 y^2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

Bài 4 (5 điểm):

Cho ΔABC ngoại tiếp (O) có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi D, E, F là tiếp điểm của AB, BC, CA với (O). ED và EF cắt đường thẳng qua A song song với BC tại G và H.

- 1) Tính $\frac{DG}{DE}$ theo a, b, c .

- 2) Chứng minh: GF, HD và EO đồng quy.

- 3) Gọi EO cắt GH tại Q, chứng minh: tâm đường tròn nội tiếp ΔDFQ thuộc (O).

Bài 5 (2 điểm):

Cho ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và nửa chu vi là p . D là điểm trên cạnh BC sao cho bán kính hai đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD bằng nhau.

Chứng minh: $AD = \sqrt{p(p-a)}$.