

Bài 1. (3,0 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $A(x) = x^2 - 3x + 2.$

2) $B(x; y) = x^2 + 4y^2 - 4xy - 4.$

Bài 2. (2,0 điểm)

Tìm x sao cho $(x-2)^3 + (2x+1)^3 - 9(x+1)^3 = -16.$

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH , đường trung tuyến AM . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC . Trên tia đối của EH lấy điểm P sao cho $EP = EH$, trên tia đối của FH lấy Q sao cho $FH = FQ$.

- 1) Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.
- 2) Chứng minh rằng tứ giác $BPQC$ là hình thang vuông và $PB + QC = BC$.
- 3) Chứng minh AM vuông góc với EF .
- 4) Gọi (d) là đường thẳng thay đổi, đi qua A , nhưng không cắt cạnh BC của tam giác ABC . Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên (d) . Tìm vị trí của d để chu vi tứ giác $BXYC$ lớn nhất.

Bài 5. (0,5 điểm)

1) (Dành cho các lớp 8B, 8C, 8D, 8E)

Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính giá trị của biểu thức $M = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$.

2) (Dành riêng cho lớp 8A)

Với a, b là các số thực thỏa mãn $a^3 + b^3 - 3ab = -18$. Chứng minh rằng $-9 < a + b < -1$.

HẾT

Chú ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $B(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy - 4$

Câu 2. Tìm x sao cho $(x-2)^3 + (2x+1)^3 - 9(x+1)^3 = -16$.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH , đường trung tuyến AM . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC . Trên tia đối của tia EH lấy điểm P sao cho $EP = EH$, trên tia đối của tia FH lấy điểm Q sao cho $FQ = FH$.

a) Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tứ giác $BPQC$ là hình thang vuông và $BP + QC = BC$.

c) Chứng minh AM vuông góc với EF

d) Gọi (d) là đường thẳng thay đổi, đi qua A , nhưng không cắt cạnh BC của tam giác ABC .

Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên (d) . Tìm vị trí của (d) để chu vi tứ giác $BXYC$ lớn nhất.

Câu 5.

a) (Dành cho các lớp 8B, 8C, 8D, 8E)

Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính giá trị của biểu thức $M = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$

b) (Dành riêng cho lớp 8A)

Với a, b là các số thực thỏa mãn $a^3 + b^3 - 3ab = -18$. Chứng minh rằng $-9 < a + b < -1$

❧HẾT❧

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $B(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy - 4$

Lời giải

a) $A(x) = x^2 - 3x + 2$

$$= x^2 - x - 2x + 2$$

$$= x(x-1) - 2(x-1)$$

$$= (x-1)(x-2)$$

b) $B(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy - 4$

$$= (x^2 - 4xy + 4y^2) - 4$$

$$= (x-2y)^2 - 2^2$$

$$= (x-2y-2)(x-2y+2)$$

Câu 2. Tìm x sao cho $(x-2)^3 + (2x+1)^3 - 9(x+1)^3 = -16$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x-2)^3 + (2x+1)^3 - 9(x+1)^3 = -16$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 + (2x+1)^3 - (x+1)^3 - 8(x+1)^3 = -16$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 - (x+1)^3 + (2x+1)^3 - 8(x+1)^3 = -16$$

$$\Leftrightarrow [x-2-(x+1)][(x-2)^2 + (x-2)(x+1) + (x+1)^2] + (2x+1)^3 - [2(x+1)]^3 = -16$$

$$\Leftrightarrow (x-2-x-1)(3x^2-3x+3) + [2x+1-2(x+1)][(2x+1)^2 + (2x+1)(2x+2) + (2x+2)^2] = -16$$

$$\Leftrightarrow -3(3x^2-3x+3) + (-1)(4x^2+4x+1+4x^2+6x+2+4x^2+8x+4) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9x^2 + 9x - 9 - (12x^2 + 18x + 7) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9x^2 + 9x - 9 - 12x^2 - 18x - 7 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -21x^2 - 9x = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x.(7x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{0; -\frac{3}{7}\right\}.$$

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Lời giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

Mà $(a-b)^2 \geq 0; (b-c)^2 \geq 0; (c-a)^2 \geq 0$ với mọi số a, b, c .

$$\text{Suy ra } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , ($AB < AC$), đường cao AH , đường trung tuyến AM . Gọi E, F lần

lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC . Trên tia đối của tia EH lấy điểm P sao cho $EP = EH$, trên tia đối của tia FH lấy điểm Q sao cho $FQ = FH$.

a) Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

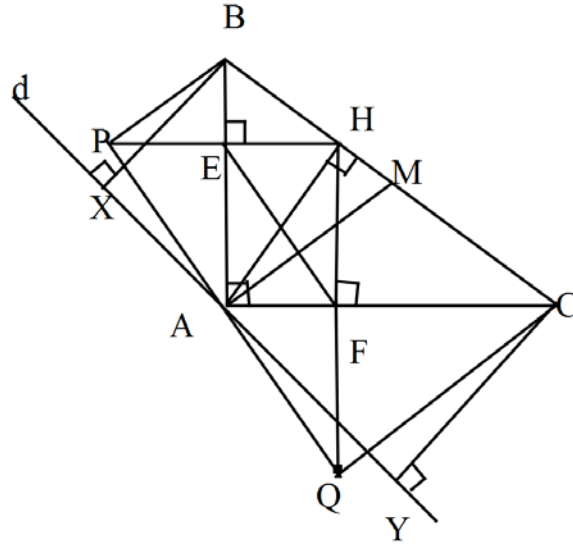
b) Chứng minh rằng tứ giác $BPQC$ là hình thang vuông và $BP + QC = BC$.

c) Chứng minh AM vuông góc với EF

d) Gọi (d) là đường thẳng thay đổi, đi qua A , nhưng không cắt cạnh BC của tam giác ABC .

Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên (d) . Tìm vị trí của (d) để chu vi tứ giác $BXYC$ lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có P đối xứng với H qua E

$\Rightarrow E$ là trung điểm của HP

mà AB vuông góc với HP

$\Rightarrow AB$ là trung trực của HP

$\Rightarrow H$ đối xứng với P qua AB

$\Rightarrow AP = AH$ và góc $\widehat{HAE} = \widehat{PAE}$

Vì Q đối xứng với H qua F

$\Rightarrow F$ là trung điểm của QH

mà AC vuông góc với QH

$\Rightarrow AC$ là trung trực của QH

$\Rightarrow H$ đối xứng với Q qua AC

$\Rightarrow AQ = AH$ và $\widehat{HAF} = \widehat{QAF}$

$\Rightarrow \widehat{QAP} = 2(\widehat{HAE} + \widehat{HAF}) = 2\widehat{BAC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

b) Xét $\triangle AQC$ và $\triangle AHC$ có

$AQ = AH$ (cmt)

$\widehat{HAF} = \widehat{QAF}$ (cmt)

AC chung

$\Rightarrow \triangle AQC = \triangle AHC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow CQ = CH ; \widehat{CQA} = \widehat{CHA} = 90^0$$

Chứng minh tương tự ta có : $BP = BH ; \widehat{BPA} = \widehat{BHA} = 90^0$

$$\Rightarrow BP + QC = BH + CH = BC$$

Xét tứ giác $BPQC$ có $BP \perp PQ; CQ \perp PQ \Rightarrow BP \parallel CQ$.

$$\text{Mà } \widehat{CQA} = 90^0$$

$\Rightarrow BPQC$ là hình thang vuông.

c) Xét $\triangle QHP$ có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF \parallel PQ$

Ta có :

$$AH = AQ \quad (\triangle AQC = \triangle AHC)$$

$$AH = AP \quad (\triangle APB = \triangle AHB)$$

$$\Rightarrow AP = AQ .$$

Mà $BM = MC$

$\Rightarrow$ Hình thang $BCQP$ có AM là đường trung bình $\Rightarrow AM \parallel CQ$

$$PQ \perp CQ \Rightarrow PQ \perp AM \Rightarrow EF \perp AM$$

d) Ta có:

$$(BX + AX)^2 \leq 2(BX^2 + AX^2) = 2AB^2$$

$$\Rightarrow BX + AX \leq AB\sqrt{2}$$

$$(CY + AY)^2 \leq 2(CY^2 + AY^2) = 2AC^2$$

$$\Rightarrow CY + AY \leq AC\sqrt{2}$$

Chu vi hình thang

$$P_{BXYC}$$

$$= BX + XY + CY + BC$$

$$= BX + AX + AY + CY + BC$$

$$\leq AB\sqrt{2} + AC\sqrt{2} + BC$$

$$P_{BXYC} \max = AB\sqrt{2} + AC\sqrt{2} + BC$$

$\Leftrightarrow d$ là phân giác góc ngoài tại đỉnh A hay d vuông góc với phân giác $\widehat{BAC}$.

Câu 5.

a) (Dành cho các lớp 8B, 8C, 8D, 8E)

Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính giá trị của biểu thức $M = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$

b) (Dành riêng cho lớp 8A)

Với a, b là các số thực thỏa mãn $a^3 + b^3 - 3ab = -18$. Chứng minh rằng $-9 < a + b < -1$

Lời giải

a) Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Rightarrow (a^3 + b^3) + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab(a+b+c) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \left[a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab \right] = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$$

TH1: $a+b+c=0$

$$\Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b. \text{ Khi đó}$$

$$M = (-c)(-a)(-b) + abc = -abc + abc = 0.$$

TH2: $a=b=c$

$$\Rightarrow M = 2a.2b.2c + abc = 8abc + abc = 9abc.$$

b) Ta có

$$a^3 + b^3 - 3ab = -18$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 1 - 3ab = -17$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 1 - 3ab = -17$$

$$\Rightarrow (a+b+1) \left[(a+b)^2 - (a+b) + 1 \right] - 3ab(a+b+1) = -17$$

$$\Rightarrow (a+b+1) (a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b) = -17 < 0$$

$$\Rightarrow (a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b) < 0$$

mà $a^2+b^2+1-ab-a-b = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2] > 0$ (dấu “=” không xảy ra vì theo giả thiết a, b không thể đồng thời bằng 1)

$$\Rightarrow a+b+1 < 0$$

$$\Rightarrow a+b < -1$$

$$\text{Ta có: } (a+b)^3 - 3ab(a+b+1) = -18$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 3ab \leq \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\Rightarrow 3ab(a+b+1) \geq \frac{3}{4}(a+b)^2(a+b+1) \quad (\text{vì } a+b+1 < 0)$$

$$\text{Đặt } a+b=t$$

$$\Rightarrow -18 \leq t^3 - \frac{3}{4}t^2(t+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + 18 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(t^3 - 3t^2 + 72) \geq 0$$

$$\Rightarrow t^3 - 3t^2 + 72 \geq 0$$

$$\Rightarrow t^3 \geq -72 + 3t^2 \geq -72$$

$$\Rightarrow t^3 \geq -72$$

$$\Rightarrow t > -5 > -9$$

$$\Rightarrow a+b > -9.$$

$$\text{Vậy } -9 < a+b < -1.$$