

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH ĐỊNH Để chính thức	ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH Năm học: 2018 – 2019 Môn: TOÁN 9 – Ngày thi: 18/03/2019 Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)
--	--

Bài 1. (5.0 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức: $A = x^3 + y^3 - 3(x + y)$, biết rằng:

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \text{ và } y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

2) Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình:

$$(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \text{ luôn có nghiệm.}$$

Bài 2. (5.0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

Bài 3. (3.0 điểm)

1) Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

2) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5.$$

Bài 4. (7.0 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC vuông cân tại A . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng PD .

a) Chứng minh rằng: $AH \perp BH$.

b) Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I . Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AH . Gọi M là giao điểm của AO và BC . Chứng minh rằng $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} \geq 2 \cdot \frac{AB}{AC}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

----- ♡ HẾT ♡ -----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO 2018 – 2019

Bài 1. (5.0 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức: $A = x^3 + y^3 - 3(x + y)$, biết rằng:

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \quad \text{và} \quad y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

2) Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình:

$$(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \quad \text{luôn có nghiệm.}$$

Giải

1) • Ta có $x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 3x + 3 - 2\sqrt{2} = 6 + 3x$

$$\text{và } y^3 = \left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\right)^3 = 17 + 12\sqrt{2} + 3y + 17 - 12\sqrt{2} = 34 + 3y$$

• Cộng vế theo vế, ta được: $x^3 + y^3 = 40 + 3x + 3y \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3(x + y) = 40$.

➤ Vậy $A = 40$ khi $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$.

2) • Từ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4m + 4n = 2m.n \leq m^2 + n^2 \Leftrightarrow m^2 + n^2 - 4m - 4n > 0 \quad (*)$.

$$\text{Ta có: } (x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + n = 0 & (2) \\ x^2 + nx + m = 0 & (3) \end{cases}$$

• Giả sử cả hai phương trình (2) và (3) đều vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_2 < 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4n < 0 \\ n^2 - 4m < 0 \end{cases} \longrightarrow m^2 + n^2 - 4m - 4n < 0 \quad (**).$$

Nhận thấy (*) và (**) mâu thuẫn nên giả sử sai. Suy ra trong hai phương trình: (2) và (3) có ít nhất một phương trình có nghiệm.

➤ Do đó phương trình (1) luôn có nghiệm.

Bài 2. (5.0 điểm)

$$1) \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + xy + y = 1 & (1) \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 & (2) \end{cases}$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

Giải

1) Điều kiện $x \geq 0$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow (x+1)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1-x$. (Do $x+1 > 0$)

• Thay $y = 1-x$ vào (2), ta được: $\sqrt{x} - 1 + \sqrt[3]{x-1} + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{x-1} + 4(x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} \cdot \left(\frac{(\sqrt[3]{x-1})^2}{\sqrt{x}+1} + 1 + 4(\sqrt[3]{x-1})^2 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{Vì } \frac{(\sqrt[3]{x-1})^2}{\sqrt{x}+1} + 1 + 4(\sqrt[3]{x-1})^2 > 0, \forall x \geq 0).$$

Với $x = 1 \longrightarrow y = 0$.

➤ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

2) Ta có: $(1) \Leftrightarrow x(x-1) + y(x-1) - 2y^2(x-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+y-2y^2) = 1$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ suy ra $\begin{cases} x-1=1 \\ x+y-2y^2=1 \end{cases} (I)$ hoặc $\begin{cases} x-1=-1 \\ x+y-2y^2=-1 \end{cases} (II)$.

$$\bullet (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \bullet (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

➤ Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là: $(0;1)$ và $(2;1)$.

Bài 3. (3.0 điểm)

1) Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

2) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5.$$

Giải

1) Gọi $A_i A_j$ là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 8073 điểm đã cho.

• Giả sử A_m là điểm cách xa đoạn thẳng $A_i A_j$ nhất. Khi đó:

Tam giác $A_i A_j A_m$ là tam giác lớn nhất và có diện tích không lớn hơn 1.

• Ta vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_m lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_i A_j A_m$.

Ta được 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ. Và tam giác lớn này có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn này chứa tất cả 8073 điểm đã cho.

Nhận thấy $8073:4$ được 2018 dư 1. Nên theo nguyên lý Dirichlet, suy ra có ít nhất 1 trong 4 tam giác có 1 tam giác chứa 2019 trong 8073 điểm đã cho.

$$\begin{aligned} 2) \bullet \text{ Ta có: } 2P &= 2a\sqrt{b^3+1} + 2b\sqrt{c^3+1} + 2c\sqrt{a^3+1} \\ &= 2a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} + 2b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)} + 2c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \\ &\stackrel{\text{COSI}}{\leq} a(b^2+2) + b(c^2+2) + c(a^2+2) = ab^2 + bc^2 + ca^2 + 6 = M + 6 \end{aligned}$$

• Không mất tính tổng quát, giả sử $b \leq c \leq a$ thì:

$$b(a-c)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow abc + b^2c \geq ab^2 + bc^2 \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq abc + b^2c + ca^2.$$

$$\text{Suy ra } M \leq abc + b^2c + ca^2 \leq 2abc + b^2c + ca^2 = c(a+b)^2 = 4.c \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$\leq \frac{4}{27} \left(c + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} \right)^3 = \frac{4(a+b+c)^3}{27} = 4.$$

$$\bullet \text{ Do đó } 2P \leq 10 \Leftrightarrow P \leq 5. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b+c=3 \\ b \leq c \leq a \\ 2c=a+b \\ abc=2abc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \\ a=2 \end{cases}$$

➤ Vậy với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $a+b+c=3$ thì

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c) = (0;1;2), (1;2;0), (2;0;1)$.

Bài 4. (7.0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng PD .

a) Chứng minh rằng: $AH \perp BH$.

b) Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I . Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AH . Gọi M là giao điểm của AO và BC . Chứng minh rằng $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} \geq 2 \cdot \frac{AB}{AC}$ (*). Dấu bằng xảy ra khi nào?

Giải

1. (Hướng dẫn giải)

a) Dễ dàng chứng minh được $MNAP$ là hình vuông.

Ta có $MNPH$ và $ANHP$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{APN} = \widehat{AHN} = 45^\circ \text{ và } \widehat{MHN} = \widehat{MPN} = 45^\circ$$

Do đó: $\widehat{AHN} + \widehat{NHM} = 90^\circ$ hay $AH \perp BH$.

b) Vì $\triangle ABI$ và $\triangle ABH$ là các tam giác vuông nên tứ giác $AHBI$ nội tiếp, suy $\widehat{BHI} = \widehat{BAI} = 45^\circ$.

Lại có $\widehat{MHN} = 45^\circ$ do đó N nằm trên đường thẳng HI . Hay H, N, I thẳng hàng.

2. (Hướng dẫn giải) Chứng minh tương đương:

• Kẻ phân giác của góc BAC cắt BC tại I . Suy ra

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \quad (1).$$

• Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt AM tại D , cắt AI tại E và cắt AH tại K .

Khi đó: $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{CK}$; $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD}$ và $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CE}$ (2).

• Từ (1) và (2) suy ra:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{AB}{CK} + \frac{AB}{CD} \geq 2 \cdot \frac{AB}{CE} \Leftrightarrow \frac{1}{CK} + \frac{1}{CD} \geq \frac{2}{CE} \quad (3).$$

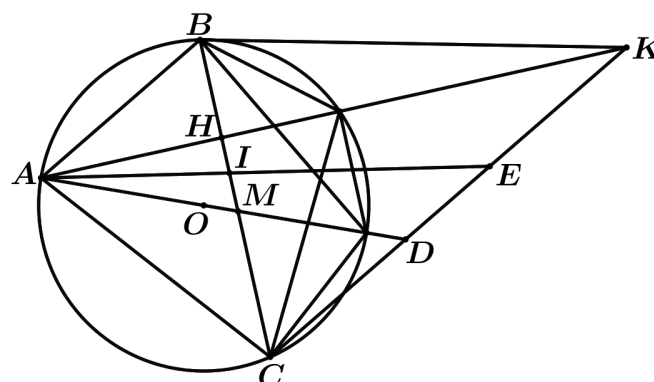
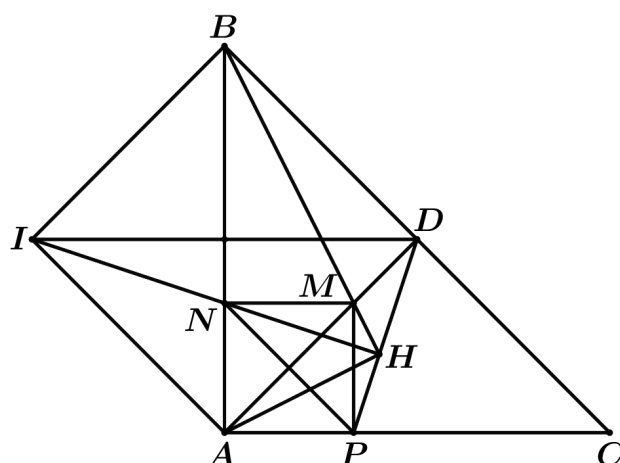
• Ta có $\widehat{CEA} = \widehat{BAE} = \widehat{CAE} \rightarrow \triangle ACE$ cân tại C , suy ra $CA = CE$.

Do đó: (3) $\Leftrightarrow \frac{1}{CK} + \frac{1}{CD} \geq \frac{2}{CA} \Leftrightarrow \frac{CK + CD}{CK \cdot CD} \geq \frac{2}{CA}$ (4).

• Sử dụng tính chất, góc nội tiếp và hai góc phụ nhau, ta chứng minh được: $\widehat{BAH} = \widehat{CAD}$, mà $\widehat{BAH} = \widehat{AKC}$ (sltr) $\rightarrow \triangle AKC \sim \triangle DAC$, suy ra $CD \cdot CK = CA^2 \Leftrightarrow CA = \sqrt{CD \cdot CK}$.

Thay vào (4) ta được: $\frac{CK + CD}{CK \cdot CD} \geq \frac{2}{\sqrt{CK \cdot CD}} \Leftrightarrow CK + CD \geq 2\sqrt{CK \cdot CD}$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $CK = CD$, suy ra AH đi qua $O \rightarrow \triangle ABC$ cân tại A , khi đó $AB = AC$.



Trong quá trình thực hiện lời giải, Tôi cũng khó tránh khỏi sai sót.

Mọi góp ý xin vui lòng gửi qua mail: lehongquocddt@gmail.com

XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN !