

Câu 1: (1,5 điểm) Rút gọn biểu thức sau

a) $\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + \frac{7}{5}\sqrt{75} - 5\sqrt{3}$

b) $\frac{3}{3+\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}} + 6\sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 2: (2,5 điểm) Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{2}{\sqrt{x}-1}; B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x+12}{x-4} \text{ với } x \neq 0; x \neq 4$$

a) Tính giá trị của A tại $x = 25$ b) Rút gọn biểu thức B .c) So sánh $A.B$ với 2. Biết $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ **Câu 3: (2 điểm)** Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

b) $\sqrt{x^2-8x+16} - 2 = 3$

Câu 4: (3,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .1. Biết $AB = 6\text{ cm}$ và $BC = 10\text{ cm}$. Tính $\hat{B}$; $\hat{C}$; CH ; AH .2. Gọi D , E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC a) Chứng minh: $AD.AB = AE.AC$ b) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle AED$ c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ADHE$.**Câu 5: (0,5 điểm).**Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

Câu 1: a) $\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + \frac{7}{5}\sqrt{75} - 5\sqrt{3}$

$$= \sqrt{4 \cdot 3} - 2\sqrt{16 \cdot 3} + \frac{7}{5}\sqrt{25 \cdot 3} - 5\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$$

$$= -4\sqrt{3}$$

b) $\frac{3}{3+\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}} + 6\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$= \frac{3(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} - \sqrt{6-2 \cdot 2\sqrt{6}+4} + 6\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}}$$

$$= \frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6} - \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{3(3-\sqrt{6})}{3} - |\sqrt{6}-2| + 2\sqrt{6}$$

$$= 3 - \sqrt{6} - (\sqrt{6}-2) + 2\sqrt{6}$$

$$= 3 - \sqrt{6} - \sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{6}$$

$$= 5$$

Câu 2: a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{2}{\sqrt{25}-1}$$

$$A = \frac{2}{5-1}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Vậy với $x = 25$ thì $A = \frac{1}{2}$

b) Với $x \neq 0$; $x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x+12}{x-4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{4(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{x+12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 2 - 4\sqrt{x} - 8 + x + 12}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$B = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \neq 0$; $x \neq 4$.

c) Với $x \neq 0$; $x \neq 4$. ta có:

$$A.B - 2 = \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - 2$$

$$A.B - 2 = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - 2$$

$$A.B - 2 = \frac{2 - 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 2}$$

$$A.B - 2 = \frac{-2(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 2}$$

Với $x \neq 0$; $x \neq 4$. ta có: $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2(\sqrt{x} + 1) < 0 \\ \sqrt{x} + 2 > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{-2(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 2} < 0$$

$$\Rightarrow A.B - 2 < 0 \Rightarrow A.B < 2$$

Vậy với $x \neq 0$; $x \neq 4$. thì $A.B < 2$

Câu 3: a) $\sqrt{4x - 20} + \sqrt{x - 5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x - 45} = 4$

ĐKXĐ: $x \geq 5$

Với $x \geq 5$ ta có:

$$\sqrt{4x - 20} + \sqrt{x - 5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x - 45} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x - 5} + \sqrt{x - 5} - 3\sqrt{x - 5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 0\sqrt{x - 5} = 0$$

Vậy phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq 5$

b) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 2 = 3$

ĐKXD: $x \in R$

Với $x \in R$ ta có:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2} = 5$$

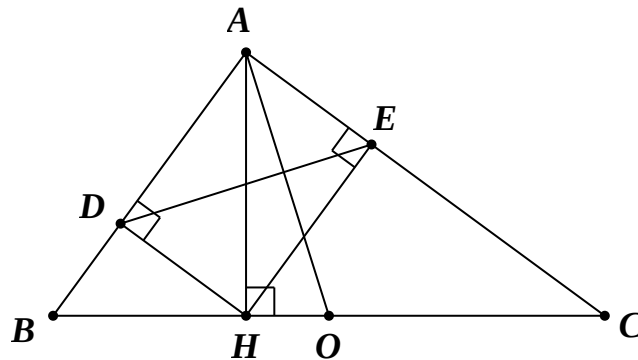
$$\Leftrightarrow |x-4| = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=5 \\ x-4=-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{9; -1\}$

Câu 4:



1. Biết $AB = 6 \text{ cm}$ và $BC = 10 \text{ cm}$. Tính $\hat{B}$; $\hat{C}$; CH ; AH .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ta có:

$$+) \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \text{ (định nghĩa tỉ số lượng giác)}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{C} \approx 37^\circ.$$

$+) \text{ Có: } \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \text{ (tính chất hai góc phụ nhau tam giác vuông)}$

$$\Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} \approx 90^\circ - 37^\circ \approx 53^\circ.$$

$+) \text{ Có } AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (định lý Pytago)}$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}.$$

$+) \text{ Có: } AB.AC = AH.BC \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)}$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{6.8}{10} = 4,8 \text{ (cm)}.$$

$+) \text{ Có: } AC^2 = CH.BC \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)}$

$$\Rightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{8^2}{10} = 6,4 \text{ (cm)}.$$

2. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC

a) Chứng minh: $AD.AB = AE.AC$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , đường cao HD ta có:

$$AH^2 = AD.AB \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)} \quad (1)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , đường cao HE ta có:

$$AH^2 = AE.AC \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD.AB = AE.AC$ (điều phải chứng minh).

b) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle AED$

Ta có: $AD.AB = AE.AC$ (chứng minh trên).

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AED$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{BAC} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (c - g - c) (điều phải chứng minh).}$$

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ADHE$.

Gọi O là trung điểm của BC

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$AO = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm) (tính chất trung tuyến và cạnh huyền tam giác vuông).}$$

Xét tứ giác $ADHE$, ta có:

$$\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = \widehat{DAE} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết).

$\Rightarrow AH = DE$ (tính chất hình chữ nhật).

$$\text{Ta có: } S_{ADHE} = AD.AE \leq \frac{AD^2 + AE^2}{2} = \frac{DE^2}{2} = \frac{AH^2}{2} \leq \frac{AO^2}{2} = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $H \equiv O \Leftrightarrow HB = HC$

$\Leftrightarrow H$ là trung điểm của $BC \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A .

$\Rightarrow$ Diện tích $ADHE$ lớn nhất là: $S_{ADHE} = \frac{25}{2}$.

Câu 5: Do $a \geq 1; b \geq 1$ nên suy ra $\begin{cases} a-1 \geq 0 \\ b-1 \geq 0 \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm ta được:

$$(a-1)+1 \geq 2.\sqrt{(a-1).1} \Leftrightarrow a \geq 2.\sqrt{(a-1)} \Leftrightarrow ab \geq 2b\sqrt{(a-1)} \text{ (Do } b \geq 1 > 0) \quad (1).$$

$$(b-1)+1 \geq 2.\sqrt{(b-1).1} \Leftrightarrow b \geq 2.\sqrt{(b-1)} \Leftrightarrow ab \geq 2a\sqrt{(b-1)} \text{ (Do } a \geq 1 > 0) \quad (2).$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$2ab \geq 2b\sqrt{a-1} + 2a\sqrt{b-1} \Leftrightarrow ab \geq a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \\ a-1=1 \\ b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \text{ (TM)} \\ b=2 \text{ (TM)} \end{cases}.$$

Vậy $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab, \forall a, b \geq 1$ (đpcm).

_____ **THCS.TOANMATH.com** _____