

Câu 1: (2,5 điểm)

Cho biểu thức: $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2025}{x}$

a, Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức K

b, Tìm x để biểu thức $A = \frac{K}{x} - \frac{2024}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2: (3,0 điểm)

a, Tìm số nguyên n thỏa mãn $2023^{2024} + 1$ chia hết cho $n^3 + 2024n$

b, Cho đa thức $P(x) = (1+x+x^2)^{2024}$

Gọi m và n lần lượt là tổng các hệ số của lũy thừa bậc chẵn và bậc lẻ của x sau khi khai triển và thu gọn đa thức P(x). Hãy xét xem m, n chẵn hay lẻ? Vì sao?

Câu 3: (3,5 điểm)

a, Tìm x biết: $(x^2+x+1)^2 = 3(x^4+x^2+1)$

b, Tìm các cặp số nguyên không âm x, y thỏa mãn: $(y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2$

c, Cho các số thực x, y, z ≥ -1 thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$

Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$

Câu 4: (3,0 điểm)

1, Người ta đặt một vòi chảy vào từ trên xuống và một vòi tháo nước ra tại lưng chừng của một bể nước. Khi bể không chứa nước nếu mở cả 2 vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước, còn nếu đóng vòi chảy ra và chỉ mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút bể đầy nước. Biết trong cùng một thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước nhiều gấp hai lần lượng nước của vòi chảy ra. Hỏi khi bể không có nước nếu mở cả hai vòi thì sau thời gian bao lâu mực trong bể nước ngang đến chỗ lắp vòi chảy ra.

2, Trong một hộp kín có 5 tấm thẻ (có kích thước và hình dạng giống nhau) được đánh số -1; 0; 1; 2; 3

a, Chọn ngẫu nhiên 1 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất tấm thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2

b, Chọn ngẫu nhiên 2 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để tích của 2 số đánh trên 2 tấm thẻ được chọn là số âm.

Câu 5: (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AC > AB$), các đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Điểm I nằm giữa B và C sao cho $IB = 2IC$. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và CH, G là điểm trên tia CH sao cho Q là trung điểm của GH. Gọi J là giao điểm của AG và BH.

a. Chứng minh $\triangle QAH$ đồng dạng với $\triangle AIB$

b. Gọi K là trung điểm của BI. Chứng minh $\triangle AHG$ đồng dạng với $\triangle KBA$ và $AG = 2AJ$

c. Giả sử $\triangle ABC$ cân tại C. Gọi N là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC.

Chứng minh rằng: $CE.CN - FE.FN = CF^2$

Câu 6: (1,0 điểm)

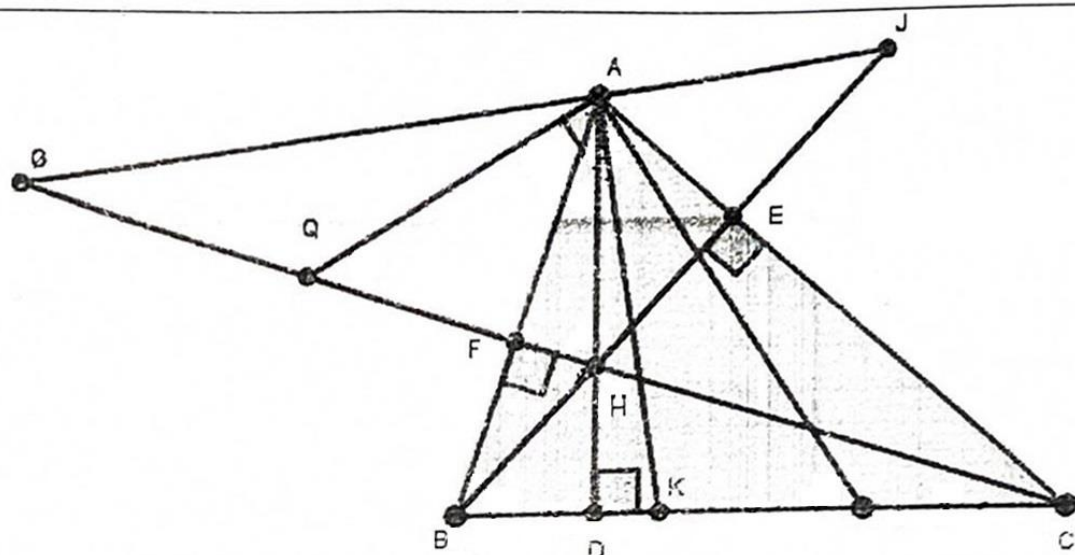
Giả sử các điểm trên mặt phẳng được tô bởi 2 màu đỏ hoặc xanh. Chứng tỏ rằng luôn tìm được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu.

..... **Hết**

Ý	Nội dung	Điểm
1a, (1,5đ)	ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$	0,25
	$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2025}{x} = \left(\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \frac{x+2025}{x}$	0,5
	$= \left(\frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \frac{x+2025}{x}$	0,5
	$= \frac{x+2025}{x}$	0,25
1b (1,0đ)	$A = \frac{K}{x} - \frac{2024}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$	0,5
	$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$	
	Dấu “=” xảy ra khi $x = -2$ (TMĐKXĐ) Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ tại $x = -2$	0,5
2a (1,5đ)	Đặt $A = 2023^{2024} + 1$; $B = n^3 + 2024n$ Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $A:B$ (1) $B = n^3 + 2024n = n^3 - n + 2025n = (n-1)n(n+1) + 2025n$ Vì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1):3$ Mà $2025n:3$ (do $2025:3$) $\Rightarrow B = (n-1)n(n+1) + 2025n:3$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow A:3$ (*)	0,5
	Lại có $2023 \equiv 1(\text{mod } 3)$ $\Rightarrow 2023^{2024} \equiv 1^{2024} \equiv 1(\text{mod } 3)$ $\Rightarrow A = 2023^{2024} + 1 \equiv 2(\text{mod } 3)$	0,5
	$\Rightarrow A \not\equiv 0(\text{mod } 3)$ (trái với (*)) mâu thuẫn $\Rightarrow$ giả sử là sai Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn: $(2023^{2024} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2024n$.	0,25
2b	Ta có: $P(1) = (1+1+1^2)^{2024} = 3^{2024} = m+n$	0,25

(1,5 đ)	$P(-1) = (1 - 1 + (-1)^2)^{2024} = 1 = m - n$	0,25
	Do đó $2m = 3^{2024} + 1 \Rightarrow m = \frac{3^{2024} + 1}{2}$	0,25
	Lại có : $3^{2024} \equiv (-1)^{2024} \pmod{4} \Rightarrow 3^{2024} \equiv 1 \pmod{4}$ $\Rightarrow 3^{2024} = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow m = \frac{3^{2024} + 1}{2} = 2k + 1$	0,5
	$\Rightarrow m$ lẻ mà $n = m - 1 \Rightarrow n$ chẵn.	0,25
3a (1,5 đ)	$(x^2 + x + 1)^2 = 3 \cdot (x^4 + x^2 + 1)$	0,5
	$(x^2 + x + 1)^2 = 3 \cdot (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$	0,25
	$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1 - 3x^2 + 3x - 3) = 0$	0,25
	$(x^2 + x + 1) \cdot (-2x^2 + 4x - 2) = 0$	0,25
	$-2(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$	0,25
	$(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)^2 = 0$ mà $x^2 + x + 1 > 0$ nên $x = 1$	0,25
3b 1,0 đ	$(y + 1)^4 + y^4 = (x + 1)^2 + x^2$ $2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2x^2 + 2x + 1$ $y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x$ $(y^2 + y)^2 + 2(y^2 + y) = x^2 + x$ $(y^2 + y + 1)^2 = x^2 + x + 1$	0,5
	Ta có với mọi số nguyên không âm: $x^2 < x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x + 1$ Suy ra: $x^2 < (y^2 + y + 1)^2 \leq x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ nên $(y^2 + y + 1)^2 = (x + 1)^2$	0,25
	Hay $x^2 + x + 1 = (x + 1)^2$ suy ra $(x, y) = (0, 0)$	0,25
3c (1,0 đ)	Từ $x \geq -1 \Rightarrow x + 2 \geq 1 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 3x - 2$	0,25
	$\Rightarrow x^5 \geq (3x - 2)x^2 = 3x^3 - 2x^2$	0,25
	Tương tự $y^5 \geq (3y - 2)y^2 = 3y^3 - 2y^2; \Rightarrow z^5 \geq (3z - 2)z^2 = 3z^3 - 2z^2$	0,25
	Vậy $x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(x^3 + y^3 + z^3) - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2$ vì $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$	0,25
4.1 (1,5 đ)	Đổi 2 giờ 42 phút = 2,7 giờ Gọi thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước trong bể ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x (giờ). ĐK: $0 < x < 1,5$	0,25đ
	Trong 1 giờ, vòi chảy vào chảy được lượng nước vào bể là $1:1,5 = \frac{2}{3}$ (bể), vòi chảy ra tháo ra khỏi bể một lượng nước là $\frac{2}{3}:2 = \frac{1}{3}$ (bể)	0,25
	Khi lượng nước ngang vòi chảy ra nếu mở cả 2 vòi thì 1 giờ lượng nước trong bể có	0,25

	thêm là $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (bể)	
	Trong x giờ vòi chảy vào được lượng nước là $\frac{2}{3}x$ (bể)	
	Trong 2,7- x giờ còn lại cả 2 vòi cùng chảy vào được lượng nước là $\frac{1}{3}(2,7-x)$ (bể)	
	Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7-x) = 1$ nên $x=0,3$ (t/m)	0,5
	Vậy thời gian để vòi chảy vào được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước ngang vòi chảy ra là 0,3 giờ.	0,25
4.2a (1đ)	Có 5 kết quả có thể là : -1; 0; 1; 2; 3. Do chọn ngẫu nhiên nên các kết quả có thể này là đồng khả năng	0,25
	Có 2 kết quả thuận lợi của biến cố tám thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2 là: 0; 2	0,25
	Vậy xác suất tám thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2 là: $\frac{2}{5}$	0,25
4.2b (0,5đ)	Các trường hợp có thể xảy ra của các số đánh trên 2 tấm thẻ khi chọn ngẫu nhiên trong hộp là: +) $\{-1;0\}; \{-1;1\}; \{-1;2\}; \{-1;3\}$ +) $\{0;1\}; \{0;2\}; \{0;3\}$ +) $\{1;2\}; \{1;3\}$ +) $\{2;3\}$ Số các kết quả xảy ra khi chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ trong hộp là 10	0,25
	Khi tích của hai số đánh trên 2 tấm thẻ đã chọn là số âm thì có 1 tấm thẻ đánh số -1, tấm thẻ còn lại đánh số khác 0. Ta có 3 trường hợp như thế. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{3}{10}$	0,25



Ta có: $\widehat{DHC} = \widehat{ABI}$ (cùng phụ với $\widehat{BCH}$)

Mà $\widehat{DHC} = \widehat{QHA}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{QHA} = \widehat{ABI}$

1,0

Xét $\triangle QAH$ và $\triangle AIB$ có: $\widehat{QAH} = \widehat{AIB}$ (cùng phụ với $\widehat{HAI}$)

$\widehat{QHA} = \widehat{ABI}$ (cmt)

1,0

Suy ra $\triangle QAH \sim \triangle AIB (g - g)$

0,5

Từ câu a $\triangle QAH \sim \triangle AIB (g - g) \Rightarrow \frac{AB}{QH} = \frac{BI}{HA} \Rightarrow \frac{AB}{2QH} = \frac{BI}{2HA} \Rightarrow \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$

0,5

Xét $\triangle AHG$ và $\triangle KBA$ có $\widehat{AHG} = \widehat{ABK} (cmt); \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$

0,5

Suy ra $\triangle AHG \sim \triangle KBA (c.g.c) \Rightarrow \frac{AG}{AK} = \frac{AH}{BK} \quad (1)$

0,5

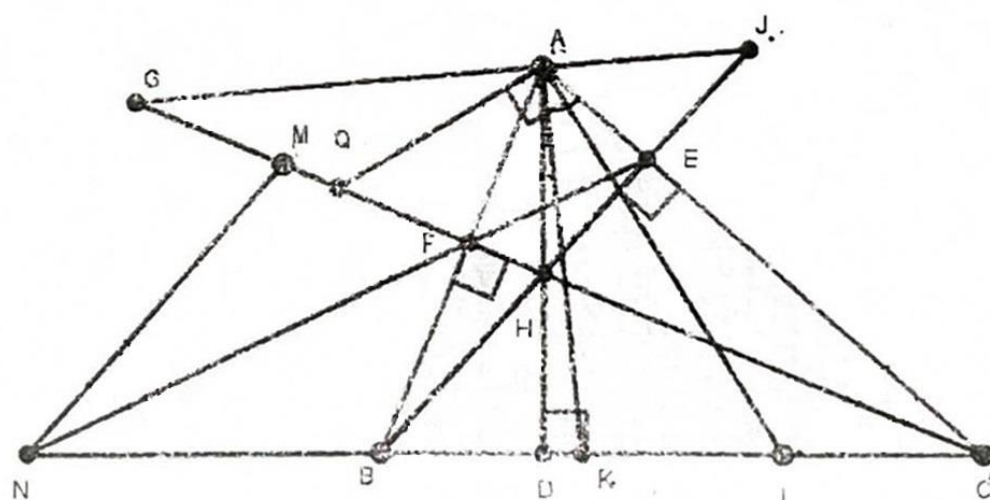
Chứng minh tương tự $\triangle AJH \sim \triangle KAC \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{KC}$

Mặt khác $KC = 2KB \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{2KB} \quad (2)$

0,5

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AG}{2AK} \Rightarrow AG = 2AJ$

0,5



5c (2đ)

	Trên tia đối của tia FC lấy điểm M sao cho $\widehat{FNM} = \widehat{FCE}$ Xét $\triangle CEF$ và $\triangle NMF$ có: $\begin{cases} \widehat{CFE} = \widehat{NFM} (\text{đối đỉnh}) \\ \widehat{FCE} = \widehat{FNM} \end{cases} \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle NMF (g.g)$	0,5đ
	$\Rightarrow \frac{EF}{MF} = \frac{CF}{FN} \Rightarrow EF.FN = FM.CF$ (3) $\triangle ABC$ cân tại C có CF là đường cao đồng thời CF là đường phân giác của $\Rightarrow \widehat{FCN} = \widehat{FCE}$	0,5đ
	Xét $\triangle CNM$ và $\triangle CFE$ có: $\begin{cases} \widehat{NMC} = \widehat{FEC} (\triangle NMF \sim \triangle CEF) \\ \widehat{FCN} = \widehat{FCE} \end{cases} \Rightarrow \triangle CNM \sim \triangle CFE (g.g)$ $\Rightarrow \frac{CN}{CF} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow CE.CN = CM.CF$ (4)	0,5đ
	Từ (3) và (4) ta có : $\Rightarrow CE.CN - FE.FN = CM.CF - FM.CF = CF(CM - FM) = CF^2$	0,5đ
6	Lấy 5 điểm bất kì phân biệt trên mp. Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 3 điểm cùng màu, giả sử là màu đỏ. Gọi 3 điểm là A, B, C. Xét trọng tâm G của tam giác ABC. Th1: G được tô đỏ $\Rightarrow$ tam giác ABC thỏa mãn	0,5
1.0 đ	Th2: G tô xanh. Ta lấy A', B', C' sao cho $AA' = 3GA; BB' = 3GB; CC' = 3GC$ (A' nằm giữa GA, B và C tương tự) Gọi M, N, P là trung điểm 3 cạnh tam giác ABC. Có $AA' = 3GA = 6GM$ nên $AA' = 2AM$. Tương tự $BB' = 2BN; CC' = 2CP$. Vì vậy mà các tam giác $A'BC, B'CA$ và $C'AB$ tương ứng nhận A, B, C làm trọng tâm. Bên cạnh đó, có thể thấy các tam giác ABC và $A'B'C'$ có chung trọng tâm G. Nếu A', B', C' cùng tô xanh thì có tam giác $A'B'C'$ và G thỏa mãn Nếu 1 trong 3 điểm được tô đỏ, giả sử là A' thì tam giác $A'BC$ và trọng tâm A cùng được tô đỏ $\Rightarrow$ thỏa mãn Vậy luôn tìm được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu	0,5