

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: Toán (môn chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 27/5/2024

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x-4\sqrt{x}+2}{x-1}$ (với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$.

b) Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+1)(y+1) = 6$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2024} .

c) Cho các số thực a, b, c thay đổi, chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

d) Cho các số thực: $b_1 \geq b_2 > 0$; $a_1 \geq b_1$; $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA sao cho $CO = 4$. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E).

a) Chứng minh rằng: $CD \cdot CE = 12$.

b) Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác OBME. Chứng minh rằng: Tứ giác OBME nội tiếp.

c) Khi M di chuyển, chứng minh rằng: $MO \cdot MC \leq 8$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Anh Nam là một vận động viên chơi cờ. Để luyện tập, mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván. Để khỏi mệt, mỗi tuần anh chơi không quá 12 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó anh chơi đúng 20 ván.

Lời giải Đề Toán Chuyên - Kỳ thi tuyển sinh vào
lớp 10 tỉnh Lai Châu năm học 2024-2025

Thực hiện: Đội tuyển HSGQG Toán trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn năm học 2023-2024
Phạm Công Hoàng, Nguyễn Hoàng Việt, Nguyễn Minh Tuấn
Vương Thành Nam, Nguyễn Văn Chính, Nguyễn Phương Thảo

1 Đề bài

Bài 1: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2x - 4\sqrt{x} + 2}{x - 1}; (x > 0, x \neq 1)$$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 2:

- a) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$.
- b) Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn: $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Bài 3:

- a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+1)(y+1) = 6$.
- b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2024} .
- c) Cho các số thực a, b, c thay đổi. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
- d) Cho các số thực $b_1 \geq b_2 > 0; a_1 \geq b_1; a_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$.

Bài 4: Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA sao cho $CO = 4$. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C và E).

- a) Chứng minh rằng: $CD \cdot CE = 12$.
- b) Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác OBME. Chứng minh rằng: Tứ giác OBME nội tiếp.
- c) Khi M di chuyển, chứng minh rằng: $MO \cdot MC \leq 8$.

Bài 5: Anh Nam là một vận động viên chơi cờ. Để luyện tập, mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván. Để khỏi mệt, mỗi tuần anh chơi không quá 12 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó anh chơi đúng 20 ván.

2 Lời giải

Bài 1: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2x - 4\sqrt{x} + 2}{x - 1}; (x > 0, x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải. a) Ta có:
$$A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2x - 4\sqrt{x} + 2}{x - 1}$$
$$= \left[\frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \right] : \frac{2(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$
$$= \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1}$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

b) Ta có:
$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1 + 2}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}.$$

Để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x} - 1$ là ước của 2. Chú ý rằng $x > 0$ nên $\sqrt{x} - 1 > -1$. Suy ra $\sqrt{x} - 1 \in \{1, 2\} \iff x \in \{4, 9\}$. $\square$

Bài 2:

a) Giải phương trình $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2 - x} = 3$.

Lời giải. a) ĐKXD: $\frac{-1}{3} \leq x \leq 2$.

Ta có: $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2 - x} = 3 \iff (\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2 - x})^2 = 9$

$$\iff 2x + 3 + 2\sqrt{(3x + 1)(2 - x)} = 9$$

$$\iff \sqrt{(3x + 1)(2 - x)} = 3 - x$$

$$\iff (3x + 1)(2 - x) = (3 - x)^2 \text{ (Do } \frac{-1}{3} \leq x \leq 2 \text{ nên } 3 - x \geq 0)$$

$$\Longleftrightarrow -3x^2 + 5x + 2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Longleftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x \in \left\{1, \frac{7}{4}\right\} \text{ (Thử lại đều thỏa mãn).}$$

□

b) Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn: $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải. Xét $\Delta' = 1 - m$. Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thì $\Delta' \geq 0 \Longleftrightarrow m \leq 1$.

Theo định lí Viete ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(1) \\ x_1 x_2 = m(2) \end{cases}$$

Ta có $3x_1 + 2x_2 = 1(3)$. Giải hệ phương trình gồm (1) và (3) ta thu được $x_1 = 5, x_2 = -7$. Thay vào (2) ta được:

$$m = x_1 x_2 = -35$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy thỏa mãn. Vậy $m = -35$ là đáp số của bài toán.

□

Bài 3:

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $(x + 1)(y + 1) = 6$.

Lời giải. Vì x, y là các số nguyên dương nên $x + 1 \geq 2$ và $y + 1 \geq 2$. Do đó:

$$\text{hoặc } \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y + 1 = 3 \end{cases} \quad \text{hoặc } \begin{cases} x + 1 = 3 \\ y + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

□

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(2n + 1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2024} .

Lời giải. Với các số nguyên a, b , ký hiệu $b \mid a$ nghĩa là a chia hết cho b hoặc b là ước của a .

$$\text{Ta có: } (2n + 1)^3 + 1 = (2n + 2)[(2n + 1)^2 - (2n + 1) + 1] = 2(n + 1)(4n^2 + 2n + 1).$$

Chú ý rằng $4n^2 + 2n + 1$ là số lẻ với mọi số tự nhiên n nên để $(2n + 1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2024} thì $2^{2024} \mid 2(n + 1) \iff 2^{2023} \mid n + 1 \iff n = 2^{2023}k - 1 \ (k \in \mathbb{Z}_+)$. $\square$

c) Cho các số thực a, b, c thay đổi. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Lời giải. Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

$$\iff 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\iff (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\iff (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\iff a = b = c$ $\square$

d) Cho các số thực $b_1 \geq b_2 > 0; a_1 \geq b_1; a_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$.

Lời giải. Trước hết, ta có bổ đề sau:

Bổ đề(Khai triển Abel): Với bốn số thực x_1, x_2, y_1, y_2 bất kì thì luôn có:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = (x_1 - x_2) y_1 + x_2 (y_1 + y_2)$$

Đăng thức trên là hiển nhiên, ta chỉ cần khai triển vế phải dễ dàng thu được vế trái.

Trở lại bài toán, ta có: $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$

$$\iff (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \geq 0$$

$$\iff b_1 \left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) + b_2 \left(\frac{a_2}{b_2} - 1 \right) \geq 0$$

Áp dụng **Bổ đề** trên ta có:

$$b_1 \left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) + b_2 \left(\frac{a_2}{b_2} - 1 \right) = (b_1 - b_2) \left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) + b_2 \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - 2 \right) \quad (1)$$

Chú ý rằng từ $b_1 \geq b_2$ và $a_1 \geq b_1$ nên $(b_1 - b_2) \left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) \geq 0$ (2).

Mặt khác, áp dụng bất AM-GM ta có $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - 2 \geq 2\sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}} - 2 \geq 2 - 2 = 0$, suy ra $b_2 \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - 2 \right) \geq 0$ (3).

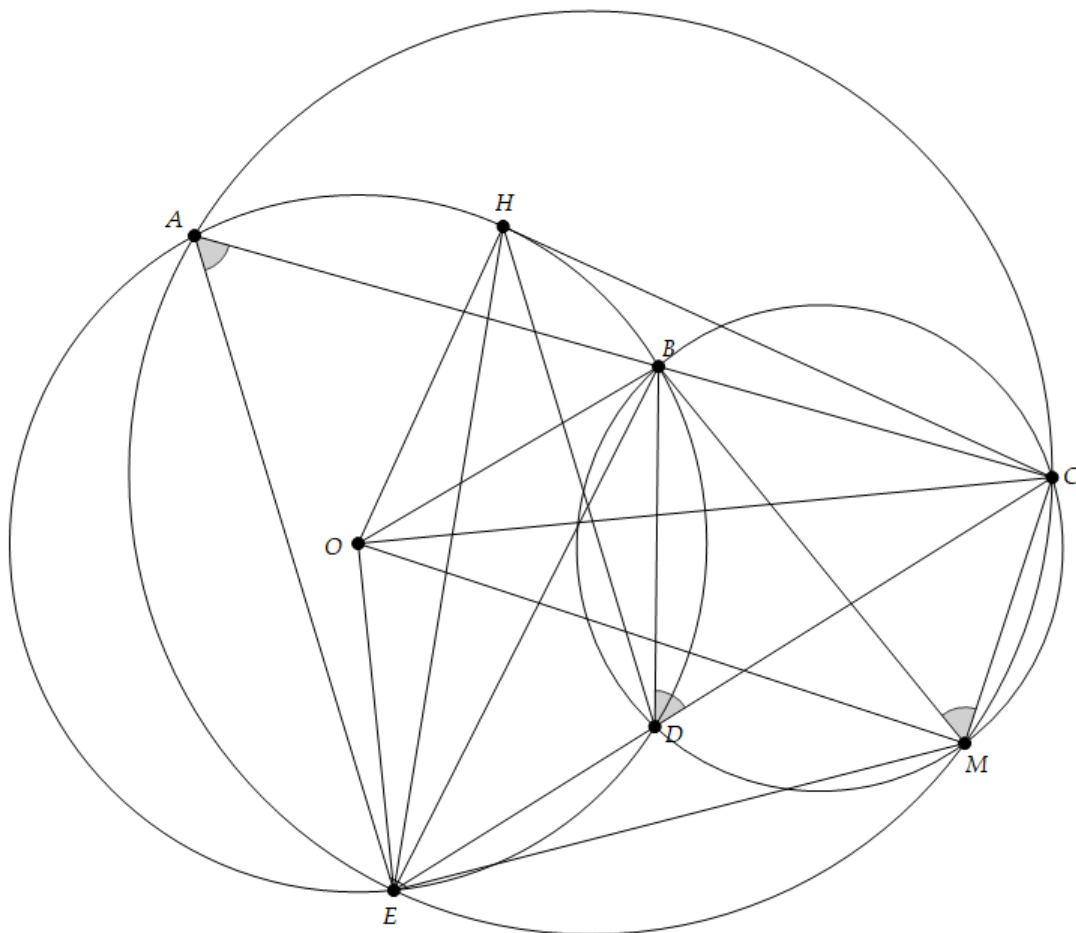
Kết hợp (2) và (3), ta có đẳng thức (1) luôn không âm. Bài toán được chứng minh.

Dấu " = " xảy ra $\iff a_1 = a_2 = b_1 = b_2$.

□

Bài 4: Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA sao cho $CO = 4$. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C và E).

- Chứng minh rằng: $CD \cdot CE = 12$.
- Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M . Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$. Chứng minh rằng: Tứ giác $OBME$ nội tiếp.
- Khi M di chuyển, chứng minh rằng: $MO \cdot MC \leq 8$.



Lời giải. a) Dựng CH là tiếp tuyến của C với (O) . Khi đó: $\triangle CHD \sim \triangle CEH$ (g.g) cho nên

$$\frac{CH}{CD} = \frac{CE}{CH} \text{ hay } CE \cdot CD = CH^2. \text{ Mặt khác, } \triangle CHO \text{ vuông tại H nên theo Định lý Pythagoras:}$$

$$CH^2 + OH^2 = CO^2 \text{ nên } CH^2 = CO^2 - OH^2 = 4^2 - 2^2 = 12. \text{ Vậy } CD \cdot CE = 12$$

b) Ta có:

$$\widehat{BME} = \widehat{CME} - \widehat{CMB} = 180^\circ - \widehat{BAE} - \widehat{CMB} = 180^\circ - \widehat{BAE} - \widehat{BDC} = 180^\circ - 2\widehat{BAE}$$

Mà $2\widehat{BAE} = \widehat{BOE}$ nên tứ giác $OBME$ là tứ giác nội tiếp

$$\text{c) Ta có: } \widehat{OMC} = \widehat{BMC} + \widehat{OMB} = \widehat{BDC} + \widehat{OEB} = \widehat{BAE} + \widehat{OEB} = 90^\circ$$

Do đó, $\triangle OMC$ vuông tại M nên $OM^2 + MC^2 = OC^2 = 16$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $16 = OM^2 + MC^2 \geq 2 \cdot MC \cdot OM$ hay $MO \cdot MC \leq 8$ $\square$

Bài 5: Anh Nam là một vận động viên chơi cờ. Để luyện tập, mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván. Để khỏi mệt, mỗi tuần anh chơi không quá 12 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó anh chơi đúng 20 ván.

Lời giải. Gọi a_i là số ván cờ mà anh Nam chơi trong ngày thứ i , $i \in \mathbb{N}^*$, $a_i \geq 1$. Không mất tính tổng quát giả sử anh Nam chơi ngày đầu tiên là đầu tuần.

Theo đề bài, mỗi tuần anh Nam chơi không quá 12 ván nên $a_{7k+1} + a_{7k+2} + \dots + a_{7k+7} \leq 12$ với $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Đặt } S_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Với mỗi cặp k, l nguyên dương, $k > l$, thì $S_k = S_l + a_{l+1} + a_{l+2} \dots + a_{k-1} + a_k \geq S_l + k - l > S_l$

Do đó $S_k > S_l$ khi và chỉ khi $k > l$.

Xét 3 tuần đầu tiên, tức 21 ngày liên tiếp, khi đó tổng số ván đã chơi không quá 36 ván do mỗi tuần không quá 12 ván, hay $S_{21} = \sum_{j=1}^{21} a_j \leq 36$

$$\text{Do đó, } S_1 < S_2 < \dots < S_{20} < S_{21} \leq 36$$

Do $S_1, S_2, \dots, S_{21}$ đều là số nguyên dương, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 cặp S_k và

S_l trong 21 số này mà 2 số này cùng số dư khi chia cho 20. Khi đó $S_k - S_l$ sẽ chia hết cho 20, mặt khác, $S_k, S_l \in \{1, 2, \dots, 36\}$ nên $S_k - S_l \in \{1, 2, \dots, 35\}$ nên nó chỉ có thể bằng 20. Mà $S_k - S_l = a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_k = 20$ cho nên từ ngày thứ $l + 1$ đến ngày thứ k thì anh chơi đúng 20 trận và ta có điều phải chứng minh. $\square$