

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Cho $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 3}$.

2) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$ (m là tham số). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+3)^2 = 4(y+1)(3y-x) \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\frac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 \end{cases}$$

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a+b+c}.$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi số $n+26$ và $n-11$ đều là các lập phương của một số nguyên dương.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tổng tất cả các ước số tự nhiên của p^4 là một số chính phương.

Câu 4. (7,0 điểm)

1) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H . Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng tam giác AMN cân.

b) Chứng minh OA vuông góc với EF ; $DE + EF + FD = \frac{AD \cdot BC}{R}$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của $\widehat{BAC}$ tại K ($K \neq A$). Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

2) Cho hình vuông $ABCD$ và $MNPQ$ có bốn đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{AC \cdot (MN + NP + PQ + QM)}{4}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

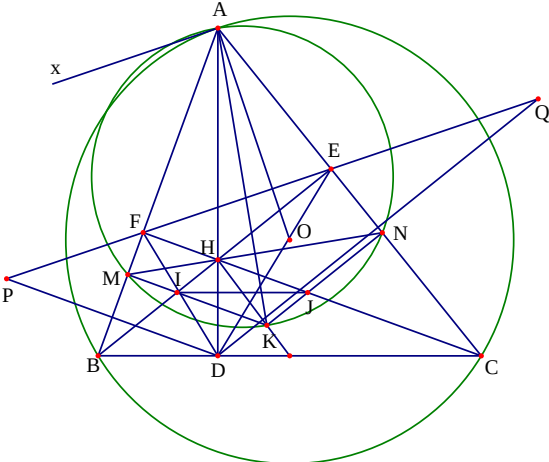
Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

----- HẾT -----

(Hướng dẫn có 04 trang)

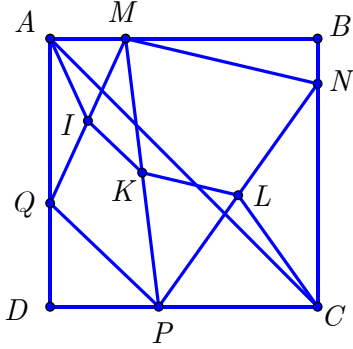
Câu	Đáp án	Điểm
1.1. (2,0 điểm)		
	$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x^3 - 6x - 6 = 0$	1,0
	$A = \sqrt{x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 3} = \sqrt{x^3 - 6x - 6} \cdot \sqrt{x^2 + 1} + 9$ $\Rightarrow A = 3$. Vậy $A = 3$	1,0
1.2. (2,0 điểm)		
	Phương trình hoành độ giao điểm của d và P là: $x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$. Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng d luôn cắt P tại hai điểm phân biệt. d luôn đi qua điểm cố định $I(0;4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $x_1 \cdot x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung.	1,0
	Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có $S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI$ với H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A, B trên trục Oy. Ta có $OI = 4, AH = x_1 = -x_1, BK = x_2 = x_2$. Suy ra $S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$ $\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_2 - x_1)^2 = 4(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2)$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -4$. Thay vào ta có: $S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0$.	1,0
2.1. (2,0 điểm)		
	$\begin{cases} (x+3)^2 = 4(y+1)(3y-x) & (1) \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\frac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $y \geq \frac{2}{3}; x \geq -3; 3y \geq x$. Phương trình (1) tương đương $(x+3)^2 = 4(y+1)(3y-x)$ $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 12y^2 + 12y - 4xy - 4x \Leftrightarrow x^2 + 2x(5+2y) - 12y^2 - 12y + 9 = 0$ Coi đây là phương trình bậc 2 của x ta có: $\Delta' = (2y+5)^2 + 12y^2 + 12y - 9 = 4y^2 + 4$ suy ra $\begin{cases} x = -5 - 2y - (4y+4) = -6y - 9 \\ x = -5 - 2y + (4y+4) = 2y - 1 \end{cases}$ Trường hợp 1: $x = -6y - 9$. Do $x \geq -3 \Rightarrow -6y - 9 \geq -3 \Leftrightarrow y \leq -1$ suy ra phương trình vô nghiệm. Trường hợp 2: $x = 2y - 1$ thay vào phương trình 2 của hệ ta có:	1,0

	$\sqrt{3y-2} - \sqrt{y+2} = 2y^2 - 3y - 2 \Leftrightarrow \frac{2y-2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} = 2y+1 \quad y-2$ Ta có: $\frac{2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; 2y+1 \geq \frac{7}{3}$. Nghĩa là $VP > VT$, suy ra $y = 2 \Rightarrow x = 1$. Vậy hệ có nghiệm $x; y = 1; 2$.	
2.2. (2,0 điểm)		
	Ta có: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow x = \frac{a+b}{c} \geq 4$ $P \geq 4\sqrt{\frac{1}{2}a+b^2+c^2} + \frac{1}{a+b+c} = 4c\sqrt{\frac{x^2}{2}+1} + \frac{1}{cx+1}.$	1,0
	$\Rightarrow P \geq \frac{4c}{3} \cdot 2x+1 + \frac{1}{cx+1} \geq 4\sqrt{\frac{2x+1}{3x+3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{3x+3}} \geq \frac{4\sqrt{15}}{5}.$ Vậy $P_{\min} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$ khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{\sqrt{15}}; c = \frac{1}{2\sqrt{15}}$.	1,0
3.1. (2,0 điểm)		
	Giả sử $\begin{cases} n+26 = x^3(1) \\ n-11 = y^3(2) \end{cases}$ với x, y là các số nguyên dương. Lấy (1) trừ (2) từng vế ta được $x^3 - y^3 = 37 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 37.$ Chứng minh được $x-y < x^2 + xy + y^2$ với mọi x, y nguyên dương và suy ra được: $x-y = 1(3) \text{ và } x^2 + xy + y^2 = 37(4).$	1,0
	Từ (3) suy ra $x = 1+y$ thay vào (4) cho $y^2 + y - 12 = 0$ và tìm được các giá trị $y = 3; y = -4$ (loại) Từ $y = 3$ thay vào (5) cho $x = 4$ và suy ra được $n = 38$.	1,0
3.2. (2,0 điểm)		
	Gọi p là số nguyên tố nên p^4 có 5 ước số tự nhiên là $1, p, p^2, p^3, p^4$. Giả sử $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ với $n \in \mathbb{N}$. Ta có $(2n)^2 = 4n^2 = 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4$ (1) Suy ra $2p^2 + p^2 < (2n)^2 < 2p^2 + p + 2^2$. Bất đẳng thức này xảy ra nếu $(2n)^2 = 2p^2 + p + 1^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$ (2)	1,0
	Từ (1) và (2) suy ra $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$ $\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ p = 3 \end{cases}$ Vì p là số nguyên tố nên $p = 3$.	1,0

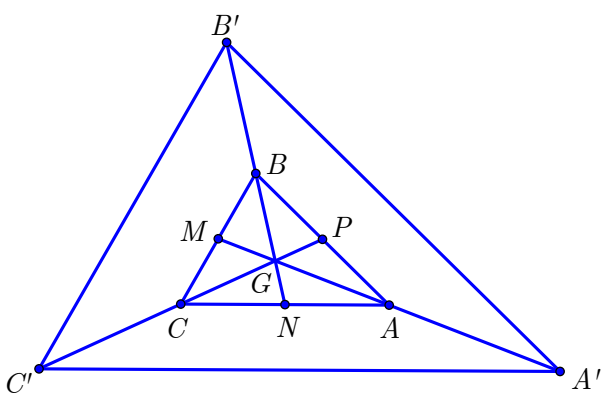
	Đảo lại với $p = 3$, ta có: $p^4 = 81$ có các ước số tự nhiên là: $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$ và $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121 = 11^2$	
4.1a. (2,0 điểm)		
		
	Ta có $AMN = ABH + MHB$ và $ANM = ACH + NHC$ Do HM và HN lần lượt là phân giác của góc BHF và CHE và ta có $BHF = CHE$ nên suy ra được $MHB = NHC$. Lại có tứ giác BFEC nội tiếp nên $FBH = CHE$. Từ đó ta được $AMN = ANM$ nên tam giác AMN cân tại A.	2,0
4.1.b (2,0 điểm)		
	Từ A ta vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O). Khi đó ta có $BAx = ACB$. Mặt khác tứ giác BCEF nội tiếp nên ta có $AFE = ACB$. Do đó ta được $AFE = xAB$ nên $Ax \parallel EF$ mà ta lại có $OA \perp EF$.	1,0
	Hoàn toàn tương tự ta cũng có $OB \perp DF; CO \perp DE$. Từ đó suy ra $S_{ABC} = S_{FOEA} + S_{BDOF} + S_{CDOE}$ $= \frac{1}{2} R \cdot EF + \frac{1}{2} R \cdot DE + \frac{1}{2} R \cdot FD = \frac{1}{2} R (DE + EF + FD)$ Mà ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$ nên $DE + EF + FD = \frac{AD \cdot BC}{R}$	1,0
4.1.c (2,0 điểm)		
	Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc MAN tại K nên AK là đường kính của đường tròn. Từ đó ta có $KMA = KNA = 90^\circ$. Từ đó dẫn đến $KM \parallel CH$ và $KN \parallel BH$ suy ra tứ giác HIKJ là hình bình hành, do đó HK đi qua trung điểm của IJ. Do $IM \parallel HF$ nên theo định lí Talets ta có $\frac{IH}{IB} = \frac{MF}{MB}$. Lại có HM là phân giác của tam giác BHF nên ta có $\frac{MF}{MB} = \frac{HF}{HB}$.	1,0

	Từ đó ta được $\frac{IH}{IB} = \frac{HF}{HB}$. Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{HJ}{CJ} = \frac{HE}{HC}$. Mà tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên ta có $\frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC}$ do đó $\frac{IH}{IB} = \frac{HJ}{CJ}$. Từ đây suy ra $IJ \parallel BC$. Theo bổ đề hình thang HK đi qua trung điểm của BC cố định hay HK luôn đi qua một điểm cố định.	1,0
--	---	-----

4.2. (1,0 điểm)

	 Gọi T, K, L là trung điểm MQ, MP, NP theo tính chất đường trung bình và trung tuyến tam giác vuông ta có $MN + NP + PQ + QM = 2(KL + CL + IK + AI) \geq 2AC$. Từ đó suy ra đpcm.	1,0
--	---	-----

5. (1,0 điểm)

	Trên mặt phẳng lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, chỉ dùng 2 màu để tô màu các điểm nên theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại 3 điểm cùng màu. Giả sử 3 điểm đó là A, B, C và cùng màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với 3 đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra: 1) Nếu G là màu đỏ. Khi đó A, B, C, G có cùng màu đỏ và bài toán được chứng minh. 2) Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA, BB' = 3GB, CC' = 3GC$. Khi đó nếu gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì $AA' = 3GA = 6GM \Rightarrow AA' = 2AM$.	0,5
	 Tương tự $B'B = 2BN, C'C = 2CP$. Do đó các tam giác $A'BC, B'AC, C'AB$ tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng các có tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp xảy ra. a) Nếu A', B', C' cùng màu xanh. Khi đó tam giác $A'B'C'$ và trọng tâm G có cùng màu xanh. b) Nếu ít nhất một trong các điểm $A'B'C'$ có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A' màu đỏ. Khi đó tam giác $A'BC$ và trọng tâm có màu đỏ. Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại	0,5

	một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm màu đỏ. Đó là đpcm.	
--	--	--

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của học sinh ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----**Hết**-----