

Câu 1 (5 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

- Rút gọn A.
- Tính giá trị của A khi $x = \frac{4}{9}$.
- Tìm giá trị của x để A có giá trị nguyên.

Câu 2 (4 điểm):

1. Giải các phương trình sau:

- $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2x + 1$
- $\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x} - 2x = 6 - \sqrt{5-x}$

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^3 + 3n^2 + 2018n$ chia hết cho 6

Câu 3 (2,5 điểm): Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(m+1)x + (m-2)y = 3 \quad (d) \quad (m \text{ là tham số})$$

- Tìm giá trị của m biết đường thẳng (d) đi qua điểm A (-1; -2)
- Tìm m để (d) cắt 2 trục tọa độ và tạo thành tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

Câu 4 (7,0 điểm): Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tiếp tuyến Ax, By. Lấy điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB tại H.

- Tính MH biết AH = 3cm, HB = 5cm.
- Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh M, I, H thẳng hàng.
- Vẽ đường tròn tâm (O') nội tiếp tam giác AMB tiếp xúc AB ở K.

Chứng minh diện tích $S_{\triangle AMB} = AK.KB$

Câu 5 (1,5 điểm) Cho x; y là các số thực dương thỏa mãn $(x+1)(y+1) = 4xy$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3y^2+1}} \leq 1$

HẾT

Đề có 01 trang

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm
Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

PHÒNG GD&ĐT CON CUÔNG HƯỚNG DẪN CHẤM HSG CẤP HUYỆN LỚP 9 THCS
NĂM HỌC: 2018 – 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu	Hướng dẫn giải, đáp án	Điểm
1 (5 điểm)	a) $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	0,5 0,5 1,0
	b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, tại $x = \frac{4}{9}$ (t/m đk) $A = \frac{3\sqrt{\frac{4}{9}}}{\sqrt{\frac{4}{9}}+2} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}$ $= \frac{2}{\frac{2}{3}+2} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$	0,25 0,75 0,5
	c) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$ A nguyên $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ có giá trị nguyên. Mặt khác $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2} < 3$ (vì $\frac{6}{\sqrt{x}+2} > 0$) Suy ra $0 \leq A < 3$ Vì A nguyên nên $A = 0 ; 1 ; 2$ $A = 0$ giải ra ta được $x = 0$ (T/m đk) $A = 1$ giải ra ta được $x = 1$ (T/m đk) $A = 2$ giải ra ta được $x = 16$ (T/m đk) Vậy A nguyên thì $x \in \{ 0 ; 1 ; 16 \}$	0,25 0,25 0,25 0,75

Câu 2 (4,0 điểm)	$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2x + 1$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = 2x + 1$ 1) a) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-1}{2} \\ \begin{cases} 2x - 1 = 2x + 1 \\ 2x - 1 = -2x - 1 \end{cases} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-1}{2} \\ \begin{cases} 0x = 2(kt / m) \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$	0,5 0,5 0,5
	b) Đk $0 \leq x \leq 5$ $\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x} - 2x = 6 - \sqrt{5-x}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{x}-1)^2 + 4 \quad (1)$ Vế trái của (1) bé hơn bằng 4 ; vế phải lớn hơn hoặc bằng 4 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (t/mdk) Vậy pt có nghiệm duy nhất là $x = 1$	0,25 0,25 0,25 0,25
	2. $n^3 + 3n^2 + 2018n = n.(n+1)(n+2) + 2016n$ vì $n.(n+1)(n+2)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên vừa chia hết cho 2 và vừa chia hết cho 3 nên $n.(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6 . $2016n$ luôn chia hết cho 6 Vậy $n^3 + 3n^2 + 2018n$ luôn chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$	0,5 0,5 0,25 0,25
Câu 3 (2,5 điểm)	a) Đường thẳng (d) đi qua điểm A (-1; -2) nên ta có $x = -1$; $y = -2$ thay vào và giải ra ta được $m = 0$	0,5 0,5
	Để d cắt 2 trục tọa độ thì $m \neq -1 ; 2$ c) Giả sử (d) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A và B. ta tính được tọa độ A ($\frac{3}{m+1}$; 0) B ($0; \frac{3}{m-2}$) Ta có tam giác OAB vuông tại O nên	0,25 0,25 0,25

	$AK = \frac{a+c-b}{2}; BK = \frac{a+b-c}{2}$ $\Rightarrow AK.BK = \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(a+c-b).(a+b-c)}{2} \right]$ $= \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - (b-c)^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - (b^2 + c^2) + 2bc}{2} \right]$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2bc}{2} = \frac{1}{2} bc$ $= \frac{1}{2} AM.BM = S_{\triangle AMB}$ Vậy $S_{\triangle AMB} = AK.KB$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
5 (1,5 điểm)	Từ $(x+1)(y+1) = 4xy$ $\Rightarrow \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} = 4$ $\Leftrightarrow (1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) = 4$ Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}$ Ta có $(1+a)(1+b) = 4$ $\Rightarrow 3 = a + b + ab$ $\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} + ab \geq 2\sqrt{ab} + ab$ Từ đó $ab \leq 1$ Áp dụng AM – GM cho 2 số thực dương ta có $\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a+b+ab+a^2}}$ $= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+1)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+1} \right)$ Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{3y^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1} \right)$ Cộng vế theo vế ta được	0,5 0,5 0,5

	$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3y^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)$ $\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2ab+a+b}{(a+1)(b+1)} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab+3}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+3}{4} \right)$ ≤ 1 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a}{a+b} = \frac{a}{b+1} \\ \frac{b}{a+b} = \frac{b}{b+1} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$ $x = y = 1$	
--	--	--