

Bài 1. (4,0 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau:

1) $A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{23} + \frac{-30}{23};$

$$B = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{0,625 - 0,5 + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}}.$$

2) $C = x + 3y + 2z$, biết $x + y = 5$; $y + z = -8$.

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Tìm x biết: $\left| \frac{11}{2} - x^2 \right| = \frac{3}{2}.$

2) Tìm x, y thỏa mãn: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}.$

Bài 3. (3,0 điểm)

1) Cho $b^2 = ac; c^2 = bd$ (a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d} \right)^3 = \frac{a}{d}.$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2024^{2023}$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

Bài 4. (7,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại E .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng $DE = DH$; $HE \parallel AC$.

c) Gọi K là giao điểm của AH và CE , lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng HE ($I \neq H, I \neq E$).

Chứng minh rằng $\frac{3AC}{2} < IA + IK + IC.$

2) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 15^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo $\widehat{ADC}$.

Bài 5. (2,0 điểm)

1) Một số nguyên dương được gọi là số may mắn nếu số đó gấp 99 lần tổng tất cả các chữ số của nó. Tìm số may mắn có bốn chữ số.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A , độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.

Hết

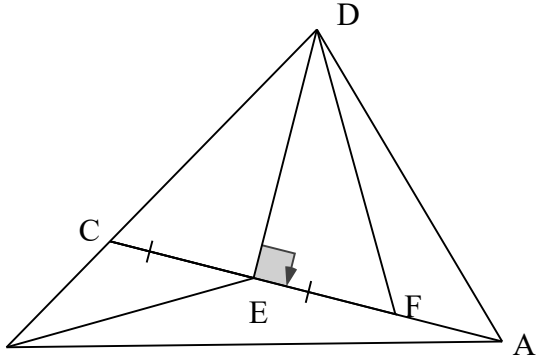
Họ và tên thí sinh.....SBD.....

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

Câu	Đáp án	Điểm
1	$A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{23} + \frac{-30}{23}$	1,5
	$A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{23} + \frac{-30}{23} = \frac{7}{23} \cdot \left(\frac{5}{17} + \frac{12}{17} \right) + \frac{-30}{23}$	0,75
	$= \frac{7}{23} \cdot 1 + \frac{-30}{23} = \frac{-23}{23} = -1.$	0,75
	$B = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{0,625 - 0,5 + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}}$	1,5
	$B = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{0,625 - 0,5 + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{\frac{5}{8} - \frac{5}{10} + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}}$	0,75
	$= \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)} = \frac{3}{5}$	0,75
	$C = x + 3y + 2z$, biết $x + y = 5$; $y + z = -8$.	1,0
	Ta có $C = x + 3y + 2z = (x + y) + 2(y + z)$	0,5
	Thay $x + y = 5$; $y + z = -8$ vào C ta được: $C = 5 + 2 \cdot (-8) = -11$	0,5
2.1	Tìm x biết: $\left \frac{11}{2} - x^2 \right = \frac{3}{2}$.	2,0
	$\left \frac{11}{2} - x^2 \right = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{2} - x^2 = \frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} - x^2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$	
	TH1: $\frac{11}{2} - x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$	

	TH2: $\frac{11}{2} - x^2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$ Vậy $x \in \{\pm 2; \pm\sqrt{7}\}$	
2.2	Tìm x, y thỏa mãn: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$	2,0
	+ Nếu $3x+7y-5=0$ thì $\begin{cases} 3x-1=0 \\ 7y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{7} \end{cases}$	0,5
	+ Nếu $3x+7y-5 \neq 0$ thì áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{9} \Rightarrow \frac{3x+7y-5}{9} = \frac{3x+7y-5}{3x} \neq 0 \Rightarrow x=3$	0,75
	Từ (1) $\Rightarrow \frac{3 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{7y - 4}{5} \Rightarrow y=2$ Vậy $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{7} \right), (3; 2) \right\}$	0,75
3.1	Cho $b^2 = ac; c^2 = bd$ (a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d} \right)^3 = \frac{a}{d}$.	1,5
	Từ $b^2 = ac$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; Từ $c^2 = bd$ suy ra $\frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Do đó: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$	0,5
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d}$	0,5
	Suy ra $\left(\frac{a}{b} \right)^3 = \left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d} \right)^3$ Hay $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d} \right)^3$ Vậy $\frac{a}{d} = \left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d} \right)^3$	0,5
3.2	Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2024^{2023}$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.	1,5

	Xét hiệu $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d$ $= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1)$	0,5
	Chứng minh được: $a(a - 1):2; b(b - 1):2; c(c - 1):2; d(d - 1):2$	0,5
	Do đó : $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d):2$ mà $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2024^{2023}:2$ $\Rightarrow a + b + c + d:2$, lại có a, b, c, d là các số nguyên dương nên $a + b + c + d > 2$ Suy ra: $a + b + c + d$ là hợp số.	0,5
4.1	Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ kẻ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại E. a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao? b) Chứng minh rằng $DE = DH$; $HE \parallel AC$. c) Gọi K là giao điểm của AH và CE, lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng HE ($I \neq H, I \neq E$). Chứng minh rằng $\frac{3AC}{2} < IA + IK + IC$.	5,0
		0,5
	1) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?	1,5
	Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A, suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ Mà $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ nên $\widehat{C} = 30^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$	0,5
	Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD(c.g.c) \Rightarrow AB = AD$ nên $\triangle ABD$ cân tại A	0,5
	Mà $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.	0,5

	2) Chứng minh rằng $DE = DH$; $HE \parallel AC$.	2,0
	* Chứng minh: $DH = DE$ Chứng minh $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền – góc nhọn) Suy ra $DH = DE$	0,75
	* Chứng minh: $HE \parallel AC$. Ta có: $\triangle ABD$ là tam giác đều (cmt); suy ra $\widehat{BAD} = 60^\circ, AB = AD = BD$ Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ $\triangle ADC$ có $\widehat{A_1} = \widehat{C} = 30^\circ$ nên $\triangle ADC$ cân tại D, suy ra $AD = CD$	0,75
	và $\widehat{D_1} = 180^\circ - 2\widehat{C} = 180^\circ - 2.30^\circ = 120^\circ$ Suy ra $\widehat{D_2} = \widehat{D_1} = 120^\circ$ Do $\triangle HDE$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{E_1} = \frac{180^\circ - \widehat{D_2}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1} = 30^\circ \Rightarrow HE \parallel AC$	0,75
	3) Chứng minh rằng $\frac{3AC}{2} < IA + IK + IC$.	1,0
	$\triangle AEC = \triangle AEK$ (g.c.g) $\Rightarrow AC = AK \Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A Ta có: $\widehat{CAK} = \widehat{A_1} + \widehat{DAH} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle ACK$ là tam giác đều Suy ra: $AC = CK = AK \Rightarrow 3AC = AC + CK + AK$ (3)	0,5
	Áp dụng BĐT tam giác vào các tam giác AIC, CIK, KIA có: $AC < IA + IC; CK < IC + IK; AK < IA + IK$ $AC + CK + AK < 2(IA + IC + IK)$ (4)	0,5
	Từ (3) và (4) suy ra : $3AC < 2(IA + IC + IK) \Rightarrow \frac{3AC}{2} < IA + IC + IK$	
4.2	Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 15^\circ, \widehat{ABC} = 45^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo $\widehat{ADC}$.	2,0
	 Kẻ $DE \perp CA$ Xét $\triangle ABC$, có $\widehat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$	0,75

	$\Rightarrow \widehat{ACD} = 60^\circ$ hay $\widehat{ECD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EDC} = 30^\circ$ Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EC = EF$. Ta chứng minh được $\triangle DCF$ đều $\Rightarrow CE = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CE = CB$ $\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CEB} = 30^\circ = \widehat{EDC}$ $\Rightarrow \triangle EBD$ cân tại E . $\widehat{CBE} = 30^\circ$ $\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{CBA} - \widehat{CBE} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \Rightarrow \triangle BEA$ cân tại E . $\Rightarrow EA = EB = ED$ $\Rightarrow \triangle AED$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$ Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 75^\circ$	0,75
5.1	Một số nguyên dương được gọi là <i>số may mắn</i> nếu số đó gấp 99 lần tổng tất cả các chữ số của nó. Tìm <i>số may mắn</i> có bốn chữ số.	1,0
	Giả sử số cần tìm là $\overline{a_1a_2 \dots a_4} \Rightarrow \overline{a_1a_2 \dots a_4} = 99(a_1 + a_2 + \dots + a_4)$ Suy ra $1000.a_1 + 100.a_2 + 10.a_3 + a_4 = 99(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ hay $901a_1 + a_2 = 89a_3 + 98a_4$	0,25
	do $89a_3 + 98a_4 \leq (89 + 98).9 = 1683$ nên $a_1 = 1$. Khi đó $a_3 = 10 - a_4 + \frac{11+a_2-9a_4}{89}$	0,25
	Giải thích được $11 + a_2 - 9a_4 = 0$ và tìm được $a_2 = 7, a_4 = 2, a_3 = 8$ và $a_1 = 1$. Vậy số cần tìm là 1782.	0,5
5.2	Cho tam giác ABC vuông tại A , độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.	1,0
	Chia cạnh huyền BC thành 2015 đoạn thẳng bằng nhau. Từ các điểm chia đó vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh AB và AC ta được 2015 tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1 và $(2014 + 2013 + \dots + 1)$ hình vuông có đường chéo bằng 1.	0,5
	Do đó trong tam giác ABC có tất cả $2015 + (2014 \times 2015)/2 = 2031120$ hình (vừa hình vuông có đường chéo bằng 1 vừa tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1). Như vậy trong 2031121 điểm sẽ tồn tại ít nhất hai điểm nằm trong một hình nào đó. Với hai điểm đó thì khoảng cách của nó không lớn hơn 1 (đpcm)	0,5