

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

2) Tìm số dư trong phép chia $(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9) + 2040$ cho $x^2 + 12x + 30$

Câu 2: (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{x-1}{2024} + \frac{x-2}{2023} + \frac{x-3}{2022} + \dots + \frac{x-2024}{1} = 2024$

2) Giải phương trình: $(3x - 2)(x + 1)^2(3x + 8) = -16$

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 - 2xy$

2) Cho biểu thức: $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Câu 4: (3 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao, AD là tia phân giác của góc BAC và $\sin B = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{2 \sin B - 3 \cos B}{2 \sin B + 3 \cos B}$

2) Cho hình chữ nhật ABCD, có $AD = k \cdot AB$ ($k > 0$). Trên cạnh BC lấy điểm M, đường thẳng AM cắt CD tại N.

a) Chứng minh rằng: Khi M chuyển động trên cạnh BC thì $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ không đổi.

b) Tìm vị trí của M trên cạnh BC để $k \cdot AM + AN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: (1 điểm) Chứng minh rằng: Với mọi $a, b > 0$ thỏa mãn: $a + b = 1$ thì:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6.$$

-----Hết-----

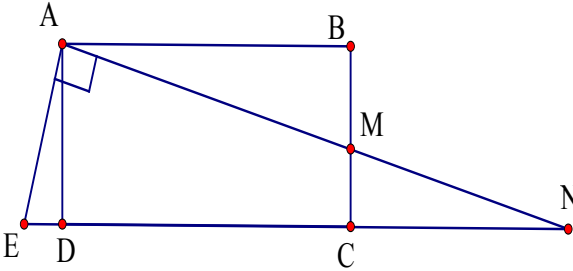
(Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Họ và tên học sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1:.....Chữ ký của giám thị 2:.....

Câu	Nội dung cần đạt được	Điểm
1.1.a	$M = \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}$ $M = \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$ $M = \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)}$ $M = \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x	0,25
		0,25
1.1.b	Ta có : $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x +) Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$ +) Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$ Ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq 1$ Nên ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$. Vậy M lớn nhất là $M = 1$ khi $x = 1$	0,25
1.2	Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040 = \dots = (x^2 + 12x + 27)(x^2 + 12x + 35) + 2040$ Đặt $x^2 + 12x + 30 = t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040$ $= (t-3)(t+5) + 2033$ $= t^2 + 2t - 15 + 2040 = t(t+2) + 2025$ Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (x^2 + 12x + 30)(x^2 + 12x + 32) + 2025$ Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040$ cho $x^2 + 12x + 30$ là 2025.	0,25 0,25 0,25 0,25
2.1	$\frac{x-1}{2024} + \frac{x-2}{2023} + \frac{x-3}{2022} + \dots + \frac{x-2024}{1} = 2024$ $\frac{x-1}{2024} - 1 + \frac{x-2}{2023} - 1 + \frac{x-3}{2022} - 1 + \dots + \frac{x-2024}{1} - 1 + 2024 = 2024$ $\frac{x-2025}{2024} + \frac{x-2025}{2023} + \frac{x-2025}{2022} + \dots + \frac{x-2025}{1} = 0$	0,25

	$(x-2025)\left(\frac{1}{2024}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2022}+\dots+\frac{1}{1}\right)=0$ $x=2025 \text{ (vì } \frac{1}{2024}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2022}+\dots+\frac{1}{1} \neq 0 \text{)}.$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2025$	0,25 0,25 0,25
2.2	Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16$ $(3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$ Đặt $3x+3=t$ nên $3x-2=t-5$ và $3x+8=t+5$ Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5)=-144$ $t^4-25t^2+144=0$ $(t^2-9)(t^2-16)=0$ $t^2=9$ hoặc $t^2=16$ $t=\pm 3$ hoặc $t=\pm 5$ Xét các trường hợp ta tìm được $x=0; x=-2; x=\frac{2}{3}; x=-\frac{8}{3}$	0,25 0,25 0,25 0,25
3.1	$5x^2+y^2=17-2xy$ Nên $4x^2+(x+y)^2=17$ Suy ra $4x^2 \leq 17$ suy ra $x^2 \leq \frac{17}{4}$ vì x^2 là số chính phương nên $x^2 \in \{0; 1; 4\}$ +) Nếu $x^2=0$ suy ra $(x+y)^2=17$ (loại) +) Nếu $x^2=1$ suy ra $(x+y)^2=13$ (loại) +) Nếu $x^2=4$ suy ra $x=2$ hoặc $x=-2$ Với $x=2$ thì $(2+y)^2=1$ suy ra $y=-3$ hoặc $y=-1$. Với $x=-2$ thì $(-2+y)^2=1$ suy ra $y=3$ hoặc $y=1$. Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y)=(2; -3), (2; -1), (-2; 3), (-2; 1)$	0,25 0,25 0,25 0,25
3.2	$a+b+c \div 4 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$ Đặt $a+b+c=4k \quad (k \in \mathbb{Z})$ suy ra $a+b=4k-c; b+c=4k-a; a+c=4k-b$ Ta có: $P=(a+b)(b+c)(c+a)-abc=(4k-c)(4k-a)(4k-b)-abc$ $= (16k^2-4ak-ack+ac)(4k-b)-abc$ $= 64k^3-16bk^2-16ak^2+4abc-16ck^2+4bck+4ack-abc-abc$ $= 4(16k^3-4bk^2-4ak^2+abk-4ck^2+bck+ack)-2abc \quad (*)$ Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 suy ra $a+b+c$ chia 2 dư 1 (1) Mà: $a+b+c \div 4$ suy ra $a+b+c \div 2$ (theo giả thiết) (2) Do đó (1) và (2) mâu thuẫn suy ra điều giả sử là sai Suy ra trong ba số a, b, c ít nhất có một số chia hết cho 2 Suy ra $2abc \div 4 \quad (**)$ Từ (*) và (**) suy ra $P \div 4$	0,25 0,25 0,25 0,25
4.1		0,25

	Xét ΔABC vuông tại A $\sin B = \frac{AC}{BC} \text{ suy ra } \frac{AC}{BC} = \frac{1}{3} \text{ suy ra } \begin{cases} AC = a \ (a > 0) \\ BC = 3a \end{cases}$ + Theo định lí Pi-ta-go ta có: $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $AB^2 = BC^2 - AC^2$ $AB = 2a\sqrt{2}$ + Ta có : $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{2a\sqrt{2}}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Khi đó : $A = \frac{2\sin B - 3\cos B}{2\sin B + 3\cos B} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2 - 6\sqrt{2}}{2 + 6\sqrt{2}} = \frac{-19 + 6\sqrt{2}}{17}$	0,25 0,25 0,25
4.2.a	Vẽ hình đúng  Ta có : $\widehat{DAE} = \widehat{BAM}$ (vì cùng phụ với $\widehat{DAM}$) $\widehat{EDA} = \widehat{MBA}$ (cùng bằng 90°) Nên $\Delta DAE \sim \Delta BAM$ (g.g) Suy ra: $\frac{AE}{AM} = \frac{AD}{AB} = k$ suy ra $AE = k \cdot AM$ (1) HS chứng minh được: ΔAEN vuông tại A, đường cao AD có $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ (2) Từ 1) 2) suy ra: $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ không đổi.	0,25 0,25 0,25 0,25
4.2.b	*) Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $k \cdot AM + AN \geq 2 \cdot \sqrt{k \cdot AM \cdot AN}$ dấu “=” xảy ra khi $AN = kAM$ (1) *) Theo bất đẳng thức Cô si ta lại có: $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{k \cdot AM \cdot AN}$ dấu “=” xảy ra khi $AN = kAM$ Mà theo câu a thì $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ Suy ra $2 \cdot \frac{1}{k \cdot AM \cdot AN} \leq \frac{1}{AD^2}$ Suy ra $kAM \cdot AN \geq 2 \cdot AD^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $k \cdot AM + AN \geq 2 \cdot \sqrt{k \cdot AM \cdot AN} \geq 2\sqrt{2} AD$. dấu “=” xảy ra khi $AN = kAM$ khi $\frac{AN}{AM} = k$. Do $AB \parallel CD$ suy ra ΔABM đồng dạng với ΔNCM Suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{AM}{MN}$	0,25 0,25

	$\frac{MB}{MB+MC} = \frac{AM}{AM+MN}$ $\frac{MB}{BC} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{k}$ $MB = \frac{BC}{k}$ * Vậy để kAM + AN đạt giá trị nhỏ nhất thì trên cạnh BC xác định điểm M sao cho: $MB = \frac{BC}{k}$. Khi đó giá trị của k.AM + AN = $2\sqrt{2}$ AD	0,25
5	*) HS chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (x, y > 0) dấu “=” xảy ra Khi và chỉ khi x = y. *) Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{(a+b)^2} = 4$ (1) Mà: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra $1 \geq 4ab$ suy ra $\frac{1}{2ab} \geq 2$ (2) Từ 1 và 2 suy ra: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq 4 + 2 = 6.$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.	0,25 0,25 0,25

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Cho $M = \frac{a^4 - 16}{a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 16a + 16}$ ($a \neq 2$). Tìm giá trị nguyên của a để M có giá trị nguyên

2) Tìm nghiệm của đa thức $A = x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 5$

3) Cho $x + y = a$; $x^2 + y^2 = b$ và $x^3 + y^3 = c$. Chứng minh rằng: $a^3 - 3ab + 2c = 0$

Câu 2: (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{x}{1.2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \frac{x}{4.5.6} + \dots + \frac{x}{8.9.10} = \frac{22}{45}$

2) Giải phương trình: $(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

2) Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$ (A gồm $2n$ chữ số 4); $B = \underbrace{888\dots8}_n$ (B gồm n chữ số 8). Chứng minh rằng $A + 2B + 4$ là số chính phương.

Câu 4: (3 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\tan \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

2) Cho tứ giác lồi ABCD. M là điểm bất kỳ trên AB. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại N; Qua M kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD tại Q. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AC cắt CD tại P.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành
và $MN.BD + MQ.AC = AC.BD$

b) Tìm vị trí của M sao cho diện tích hình bình hành MNPQ lớn nhất.

Câu 5: (1 điểm)

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

Hết

(Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

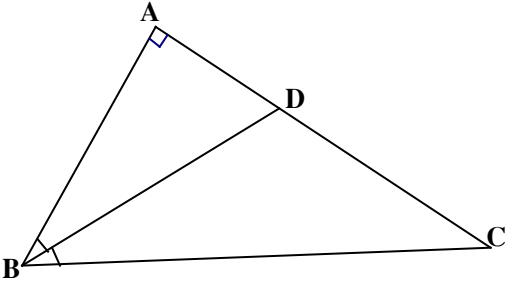
Họ và tên học sinh:.....Số báo danh:.....

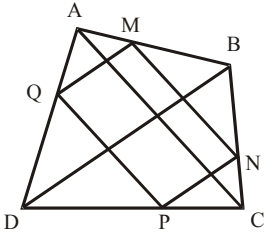
Chữ ký của giám thị 1:.....Chữ ký của giám thị 2:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA LỘC**

**HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2024 – 2025
MÔN TOÁN 9
Hướng dẫn gồm 04 trang**

Câu	Nội dung cần đạt được	Điểm													
1.1	$M = \frac{a^4 - 16}{a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 16a + 16} = \frac{(a^2 + 4)(a + 2)(a - 2)}{(a^2 + 4)(a - 2)^2} = \frac{a + 2}{a - 2} = 1 + \frac{4}{a - 2}$	0,5													
	M nhận giá trị nguyên khi $a - 2 \in U(4)$														
	Ta có bảng sau:														
	<table><tr><td>a-2</td><td>1</td><td>-1</td><td>2</td><td>-2</td><td>4</td><td>-4</td></tr><tr><td>a</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>6</td><td>-2</td></tr></table>	a-2	1	-1	2	-2	4	-4	a	3	1	4	0	6	-2
a-2	1	-1	2	-2	4	-4									
a	3	1	4	0	6	-2									
Đối chiếu với điều kiện $a \neq 2$ ta có các giá trị của a là: 3; 1; 4; 0; 6; -2															
1.2	$A = x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 5$ $A = (x^2 + y^2 + 2xy) - 4(x + y) + 4 + 4y^2 - 4y + 1$ $A = (x + y - 2)^2 + (2y - 1)^2$	0,25													
	$A = 0 \text{ khi } \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$														
	Vệ nghiệm của đa thức A là $x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$	0,25													
1.3	Ta có: $a^3 - 3ab + 2c = (x+y)^3 - 3(x+y)(x^2 + y^2) + 2(x^3 + y^3)$ $= (x+y)[(x+y)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2(x^3 + y^3)]$ $= (x+y).[x^2 + 2xy + y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 2x^3 - 2xy + 2y^3]$ $= (x+y).0 = 0$	0,25													
	Vậy $a^3 - 3ab + 2c = 0$	0,25													
2.1	$\frac{x}{1.2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \frac{x}{4.5.6} + \dots + \frac{x}{8.9.10} = \frac{22}{45}$ $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) .x = \frac{22}{45}$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{4.5.6} + \dots + \frac{2}{8.9.10} \right) .x = \frac{22}{45}$ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right) .x = \frac{22}{45}$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90} \right) .x = \frac{22}{45} \text{ suy ra } \frac{1}{2} \cdot \frac{44}{90} .x = \frac{22}{45} \text{ suy ra } \frac{22}{45} .x = \frac{22}{45} \text{ suy ra } x = 1$	0,25 0,5													
	Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$	0,25													

2.2	Ta có: $(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$ Đặt $6x + 7 = t$. Ta có $(t + 1)(t - 1)t^2 = 72$ $(t^2 - 1)t^2 = 72$ $t^4 - t^2 - 72 = 0$ $t^4 - 9t^2 + 8t^2 - 72 = 0$ $t^2(t^2 - 9) + 8(t^2 - 9) = 0$ $(t^2 - 9)(t^2 + 8) = 0$ Mà $t^2 + 8 > 0$ nên $t^2 - 9 = 0$ $t^2 = 9$ suy ra $t = \pm 3$ Suy ra $x = -\frac{2}{3}$ hoặc $x = -\frac{5}{3}$. PT có nghiệm là $x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = -\frac{5}{3}$	0,25 0,25 0,25 0,25
3.1	$5^x + 2.5^y + 5^z = 4500 (*)$ $5^x (1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x}) = 4500 = 2^2.3^2.5^3$ $5^x = 5^3$ và $1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x} = 36 = 1 + 35$ $x = 3$ và $5^{y-x} (2 + 5^{z-y}) = 5.7$ $x = 3$ và $y - 3 = 1$ và $2 + 5^{z-y} = 7 = 2 + 5$ $x = 3$ và $y = 4$ và $z - y = 1$ $x = 3$ và $y = 4$ và $z = 5$ thỏa $(*)$	0,25 0,25 0,25 0,25
3.2	Ta có $A = \underbrace{444\dots4}_{2n} = \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{000\dots0}_n + \underbrace{444\dots4}_n = \underbrace{444\dots4}_n (10^n - 1) + \underbrace{888\dots8}_n$ $= 4.\underbrace{111\dots1}_n.\underbrace{999\dots9}_n + B = 4.\underbrace{111\dots1}_n.\underbrace{9.111\dots1}_n + B = \left(6.\underbrace{111\dots1}_n\right)^2 + B$ $= \left(\frac{3}{4}.\underbrace{888\dots8}_n\right)^2 + B = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B$ Khi đó $A + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + 2.\frac{3}{4}B.2 + 4 = \left(\frac{3}{4}B + 2\right)^2$ $= \left(\frac{3}{4}.\underbrace{888\dots8}_n + 2\right)^2 = \left(3.\underbrace{222\dots2}_n + 2\right)^2 = \left(\underbrace{666\dots68}_{n-1}\right)^2$ Vậy $A + 2B + 4$ là số chính phương.	0,25 0,25 0,25 0,25
4.1		

	Vẽ đường phân giác BD của ΔABC ($D \in AC$). Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có : $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AD+DC}{AB+BC}$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB+BC}$ Xét ΔABD có $\widehat{BAD} = 90^\circ$ $\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB}$ $\tan \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB+BC}$ Vậy $\tan \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB+BC}$	0,25 0,25 0,25 0,25
4.2.a	 Theo bài ra ta có: $MN \parallel AC$, $QP \parallel AC$ suy ra $MN \parallel QP$ Do $MN \parallel AC$ nên $\frac{CN}{NB} = \frac{AM}{MB}$ (1) (định lý Ta-let) Do $MQ \parallel DB$ nên $\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QD}$ (2) (định lý Ta-let) Do $QP \parallel AC$ nên $\frac{AQ}{QD} = \frac{CP}{DP}$ (3) (định lý Ta-let) Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{CN}{NB} = \frac{CP}{DP}$ nên $NP \parallel DB$ suy ra $NP \parallel MQ$ Xét tứ giác MNPQ có $MN \parallel QP$ và $NP \parallel MQ$ nên tứ giác MNPQ là hình bình hành. Xét ΔABC có $MN \parallel AC$ nên $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA}$ (hệ quả định lý Ta-let) Xét ΔABC có $MQ \parallel BD$ nên $\frac{MQ}{BD} = \frac{MA}{AB}$ (hệ quả định lý Ta-let) Do đó $\frac{MN}{AC} + \frac{MQ}{BD} = \frac{BM}{BA} + \frac{MA}{AB}$ suy ra $\frac{MN}{AC} + \frac{MQ}{BD} = 1$ suy ra $MN \cdot BD + MQ \cdot AC = AC \cdot BD$	0,25 0,25 0,25 0,25

4.2.b	Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{MN}{AC} + \frac{MQ}{BD} \geq 2\sqrt{\frac{MN.MQ}{AC.BD}}$ Mà $\frac{MN}{AC} + \frac{MQ}{BD} = 1$ nên $1 \geq 2\sqrt{\frac{MN.MQ}{AC.BD}}$ suy ra $1 \geq 4 \cdot \frac{MN.MQ}{AC.BD}$ suy ra $MN.MQ \leq \frac{1}{4}AC.BD$ (không đổi)	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MN}{AC} = \frac{MQ}{BD} = \frac{1}{2}$ suy ra $MN = \frac{AC}{2}, MQ = \frac{BD}{2}$ hay MN, MQ là các đường trung bình của các tam giác ABC, ABD, hay M là trung điểm của AB.	0,25
	Xét hình bình hành MNPQ (giả sử có $\widehat{M}$ nhọn và $\widehat{M} = \alpha$) Kẻ QH vuông góc với MN tại H. áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông MQH ta có $QH = MQ.\sin \alpha$	0,25
	Khi đó diện tích hình bình hành MNPQ là: $S_{MNPQ} = QH.MN = MN.MQ.\sin \alpha \leq \frac{1}{4}AC.BD.\sin \alpha$ Vậy diện tích hình bình hành MNPQ lớn nhất khi M là trung điểm AB.	0,25
5	Ta có: $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$ $= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17$ $= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17$ Suy ra $H \geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22$ Dấu "=" xảy ra khi $(x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0$ và $x+2y=5$ khi đó $x=1$ và $y=2$. Vậy H nhỏ nhất là $H=22$ khi $x=1, y=2$	0,25 0,25 0,25