

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025
Bài thi: TOÁN

(Dành cho thí sinh thi vào các lớp chuyên: Toán, Tin học)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{6}{\sqrt{x} + 3} + 1$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1. Rút gọn A .
2. Tìm x để $(\sqrt{x} + 3)A = 10\sqrt{x}$.

Câu II (2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = -2x + 3$ và Parabol $(P) : y = x^2$. Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 2 - 2x$.

Câu III (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $x^2 + x + 2 - (x + 2)\sqrt{x^2 - x + 2} = 0$.
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x + 10y \end{cases}$$

Câu IV (3,0 điểm).

1. Cho tam giác ABC vuông tại B ($BC > AB$) nội tiếp trong đường tròn tâm O , đường kính $AC = 2R$. Kẻ dây cung BD vuông góc với AC , H là giao điểm của AC và BD . Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H . Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C).
 - a) Chứng minh HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC .
 - b) Khi điểm B thay đổi thì điểm H cũng thay đổi. Tìm vị trí của điểm H trên đoạn AC để diện tích tam giác $O'IH$ là lớn nhất.
2. Một xô bằng tôn dạng hình nón cụt (giả sử mép không đáng kể, đáy nhỏ bịt tôn) có các bán kính đáy là 17 (cm) và 10 (cm), chiều cao 24 (cm). Tính diện tích tôn để làm xô.

Câu V (1,0 điểm). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn
$$\begin{cases} a > 0, b > 0, c \geq 2009 \\ a + b + c = 2025 \end{cases}$$
.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = abc$.

— HẾT —

Câu 1

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{6}{\sqrt{x} + 3} + 1$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1. Rút gọn A .
2. Tìm x để $(\sqrt{x} + 3)A = 10\sqrt{x}$.

Lời giải

1. Ta có:

$$A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{6}{\sqrt{x} + 3} + 1$$

$$A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - 6(\sqrt{x} - 1) + x + 2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}.$$

$$A = \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$A = \frac{(x + 16)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$A = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + 3)A &= 10\sqrt{x} \Leftrightarrow x + 16 = 10\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow x - 10\sqrt{x} + 16 &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 8)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)} \\ x = 64 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 64$ thì $(\sqrt{x} + 3)A = 10\sqrt{x}$.

Câu 2

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = -2x + 3$ và Parabol $(P) : y = x^2$. Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 2 - 2x$.

Lời giải

1. Xét phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P) , ta có

$$x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = 9 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $(1; 1)$ và $(-3; 9)$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 2y(x - y) &= 2 - 2x \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x &= 2. \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x &= 4. \\ \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2)^2 &= 8. \end{aligned}$$

Vì $(x - 2)^2$ và $(x - 2y)^2$ là số chính phương và $0 \leq (x - 2)^2, (x - 2y)^2 \leq 8$. Do đó $\begin{cases} (x - 2y)^2 = 4 \\ (x - 2)^2 = 4 \end{cases}$ Ta có bảng giá trị sau

$x - 2$	2	-2	2	-2
$x - 2y$	2	-2	-2	2
x	4	0	4	0
y	1	1	3	-1

Vậy $(x, y) \in \{(4; 1); (0; 1); (4; 3); (0; -1)\}$.

Câu 3

1. Giải phương trình $x^2 + x + 2 - (x + 2)\sqrt{x^2 - x + 2} = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x + 10y \end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện xác định $x^2 - x + 2 \geq 0$ (đúng $\forall x$).

Đặt $\sqrt{x^2 - x + 2} = t (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2x - (x + 2)t = 0 \Leftrightarrow (t - x)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 2 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t = x$, tức là

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $t = 2$, tức là

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = 2$.

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 10x + 10y & (2) \end{cases}$$

Nhân chéo hai vế của (1) và (2) ta được

$$(10x + 10y)(x^2 + y^2) = 5(x^3 + 2y^3) \Leftrightarrow 5x(x^2 + 2xy + 2y^2) = 0$$

Vì $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (mâu thuẫn do khi đó $x^2 + y^2 = 0$ mà $x^2 + y^2 = 5$), do đó $x = 0$.

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $y = \pm\sqrt{5}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0; \sqrt{5}); (0; -\sqrt{5})$

Câu 4

1. Cho tam giác ABC vuông tại B ($BC > AB$) nội tiếp trong đường tròn tâm O , đường kính $AC = 2R$.

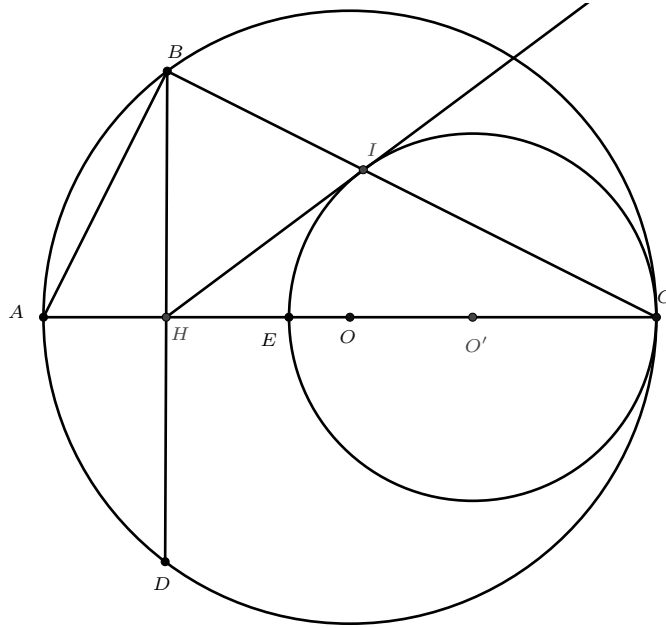
Kẻ dây cung BD vuông góc với AC , H là giao điểm của AC và BD . Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H . Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C).

a) Chứng minh HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC .

b) Khi điểm B thay đổi thì điểm H cũng thay đổi. Tìm vị trí của điểm H trên đoạn AC để diện tích tam giác $O'IH$ là lớn nhất.

2. Một xô bằng tôn dạng hình nón cụt (giả sử mép không đáng kể, đáy nhỏ bịt tôn) có các bán kính đáy là 17 (cm) và 10 (cm), chiều cao 24 (cm). Tính diện tích tôn để làm xô.

Lời giải



1.

a) Vì $\widehat{EIC}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn (O') nên $\widehat{EIC} = \widehat{BIE} = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{BIE} + \widehat{BHE} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BIEH$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{HIE} = \widehat{BHE} = \widehat{BAH} = \widehat{BCA} = \widehat{ICE}.$$

$\Rightarrow HI$ là tiếp tuyến của (O') .

b) Vì HI là tiếp tuyến của (O') nên $O'I \perp HI$ hay $\triangle O'IH$ vuông tại I .

$$\Rightarrow S_{O'IH} = \frac{1}{2} \cdot O'I \cdot HI \leq \frac{O'I^2 + HI^2}{4} = \frac{O'H^2}{4}.$$

Mặt khác, lại có

$$HO' = HE + O'E = \frac{AE}{2} + \frac{EC}{2} = \frac{AC}{2} = R \Rightarrow S_{O'IH} \leq \frac{R^2}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow O'I = HI = \frac{EC}{2}.$$

Lại có $\widehat{HIB} = \widehat{HEB} = \widehat{HAB} = \widehat{HBI}$ nên $\triangle HBI$ cân tại H dẫn đến $HI = HB$.

$$\text{Do đó, } HB = \frac{EC}{2}.$$

Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào $\triangle ABC$ vuông tại B , đường cao BH có

$$BH^2 = AH \cdot HC \Leftrightarrow \frac{EC^2}{4} = AH \cdot HC$$

$$\text{Mà } EC = HC - HE = HC - HA \text{ nên } AH \cdot HC = \frac{(HC - HA)^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH \cdot (2R - AH) = \frac{(2R - 2AH)^2}{4} = (R - AH)^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 4R \cdot AH + AH^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} R \text{ (vì } 2R > AH > 0).$$

$$\text{Vậy để } S_{O'IH_{\max}} \Leftrightarrow H \text{ nằm trên } AC \text{ sao cho } AH = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} R.$$

2. Độ dài đường sinh của chiếc xô hình nón cụt là:

$$l = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{24^2 + (17 - 10)^2} = 25 \text{ (cm)}$$

Diện tích tôn để làm xô là

$$S = S_{\text{xung quanh}} + S_{\text{đáy nhỏ}} = \pi(r_1 + r_2)l + \pi \cdot r_1^2 = \pi(17 + 10) \cdot 25 + 100\pi = 775\pi \approx 2433,5(\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích tôn để làm xô là $2433,5 \text{ cm}^2$.

Câu 5

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a > 0, b > 0, c \geq 2009 \\ a + b + c = 2025 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = abc$.

Lời giải

Ta có $2025 = a + b + c \geq a + b + 2009 \Leftrightarrow a + b \leq 16$.

$$\text{Lại có } P = abc \leq \frac{(a+b)^2}{4} \cdot c = (2025 - c)^2 \cdot \frac{16c}{2009} \cdot \frac{2009}{64} \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\sqrt[3]{(2025 - c)^2 \cdot \frac{16c}{2009}} \leq \frac{2025 - c + 2025 - c + \frac{16c}{2009}}{3} = \frac{4050 - \frac{4002c}{2009}}{3} \leq \frac{4050 - \frac{4002 \cdot 2009}{2009}}{3} = 16$$

$$\text{Suy ra } (2025 - c)^2 \cdot \frac{16c}{2009} \leq 16^3 = 4096 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } P = abc \leq 4096 \cdot \frac{2009}{64} = 128576.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 8, c = 2009$.

Vậy $P_{\max} = 128576$ khi $a = b = 8, c = 2009$.

— HẾT —

Lời giải được thực hiện bởi Vũ Đức Huy 9A1 – THCS Trọng điểm Lê Hữu Trác, Mỹ Hào, Hưng Yên.