

Bài 1 (5 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \frac{x+8}{x\sqrt{x}-8} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh $A < \frac{1}{6}$

2. Tính giá trị của biểu thức $B = (4x^5 + 8x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9x - 2)^{2021} + 2022$

tại $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}$

Bài 2 (4 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+7}$

2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy - 2 = x^2 y^2$

Bài 3 (4 điểm)

1. Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

Chứng minh: $S = 3 - \frac{bc}{a^2} - \frac{ac}{b^2} - \frac{ba}{c^2}$ có giá trị là một số tự nhiên.

2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:
 $(a^2+2).(b^2+2).(c^2+2) - 18 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 4 (6 điểm)

1. Cho đường tròn (O; R). Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA và MB tới đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi giao điểm của OM và AB là K.

a) Tìm tỉ số $\frac{OK}{OM}$ nếu $OM=2R$?

b) Vẽ cát tuyến MCD của đường tròn (C nằm giữa M và D), OH vuông góc với CD tại H, đường thẳng OH cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh:

$b_1) ON.OH = R^2$

$b_2) AB$ và tiếp tuyến tại C, D của đường tròn là ba đường thẳng đồng quy.

2. Cho hình bình hành ABCD có cạnh $CD=a$, chiều cao ứng với cạnh CD là h, E là điểm tùy ý trên cạnh AB (E khác A, B). Nối EC cắt BD tại P, ED cắt AC tại Q. Tìm vị trí của E để diện tích tam giác EPQ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó theo a và h.

Bài 5 (1 điểm)

Cho a, b, c, d là các số tự nhiên sao cho $a>b>c>d$ và thỏa mãn:

$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Chứng minh $ab + cd$ là hợp số.

- Hết -

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)