

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} - \frac{x-x\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x+39}{x+3\sqrt{x}-10}$
(với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$).

a) Rút gọn Q .

b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 2$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 5 (đơn vị diện tích).

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 + 5x + 11 = (x+7)\sqrt{2x^2+1}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y}(\sqrt{y}+1) = \sqrt{x^2+y^2}+2 \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1} = \frac{x^2+4y-4}{2} \end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $\frac{a-b\sqrt{2021}}{b-c\sqrt{2021}}$ là số hữu tỷ và $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố.

Câu 5. (7,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H , EF cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB).

a) Chứng minh tam giác APQ cân.

b) Chứng minh $DH \cdot DA = DE \cdot DF$.

c) Lấy điểm M đối xứng với điểm P qua AB , điểm N đối xứng với điểm Q qua AC . Chứng minh $MN \parallel BC$.

2. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh các đường thẳng AM, EF, DI đồng quy.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương, tùy ý.

Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:
Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2: