

Bài 1: (4,0 điểm)

1) Cho các số $a; b; c$ khác 0 và thỏa mãn $a + b + c = 3; 2ab - c^2 = 9$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{3} \right)^{2023}.$$

2) Cho biểu thức $B = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$

a) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$.

b) Tìm $x < \frac{1}{9}$ sao cho biểu thức B nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $x^2 + \sqrt{4x - 3} = 5x - 3;$

2) $x^2 + 5x + 7 = \sqrt{2x + 5}.$

Bài 3: (3,0 điểm)

1) Cho $p; q$ là các số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

2) Tìm các số nguyên tố $x; y; z$ thỏa mãn $x^y + y^x + 2022 = z$.

Bài 4: (7,0 điểm)

1) Cho đường tròn (O) , đường kính BC . Lấy điểm A trên tiếp tuyến tại B của đường tròn đó.

Vẽ dây CE của đường tròn (O) song song với OA , BE cắt OA tại H .

a) Chứng minh AE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b) Tia AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm $F; K$ (F nằm giữa O và A). Chứng minh:

i) $\widehat{FCO} = \widehat{FCE}.$

ii) $AK \cdot CH = KH \cdot CA.$

2) Đường thẳng (d) chia ΔABC thành hai phần có chu vi và diện tích bằng nhau. Chứng tỏ (d) đi qua tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Bài 5: (2,0 điểm)

1) Cho $a; b; c$ là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3; a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

Chứng minh rằng $a^3b + b^3c + c^3a \leq 8$

2) Có 6 chiếc hộp, người ta bỏ vào mỗi hộp một số hạt đậu bất kỳ lần lượt là

$k_1; k_2; k_3; k_4; k_5; k_6$ sao cho $k_1^3 + k_2^3 + k_3^3 + k_4^3 + k_5^3 + k_6^3 = 2024$. Sau đó thực hiện thuật toán:

Mỗi lần thực hiện chọn ngẫu nhiên ba hộp bất kỳ rồi bỏ vào mỗi hộp 1 hạt đậu. Hỏi sau một số lần thực hiện thì số hạt đậu trong 6 hộp có bằng nhau không?

-----HẾT-----