

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4.0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+4} + \frac{6-\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}} \right) \cdot (\sqrt{x}-1)$

- a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa. Rút gọn P .
b) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{5}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (4.0 điểm) Cho phương trình $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ (1) với m là tham số

- a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |x_1 - x_2|$$

Câu 3 (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 2x + y + xy = 4 \end{cases}$$

- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Câu 4 (6.0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB ; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng $2R$.

- a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là hình vuông.
b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.
c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích $\triangle ADE$.

Câu 5 (2.0 điểm)

a) Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{1}{2}$ với a, b là các số dương

- b) Trên mặt phẳng cho 99 điểm phân biệt sao cho từ 3 điểm bất kì trong số chúng đều tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 50 điểm.

----- HẾT -----