SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC GIANG
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 120 phút
Ngày thi: 26/02/2022

Lời giải: **Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh**

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{100}}=a\sqrt{b}-c$, với a, b, c là các số tự nhiên và b là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 100 B. 104 C. 103 **D.** 101

Câu 2. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Biết MA = 6cm, MB = 4cm. Độ dài đoạn MC bằng:

A. MC = 5cm **B.** MC = 2cm C. MC = 3cm D. MC = 10cm

Câu 3. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=2m-1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Khi đó giá trị của $-3m_0+1$ bằng:

A. -1 **B.** 4 C. 1 D. -2

Câu 4. Biết đường thẳng $y=3x+m$ cắt trục hoành tại điểm A, cắt trục tung tại điểm B. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OAB bằng 6 (O là gốc tọa độ) là:

A. $\{-6;6\}$ B. $\{6\}$ C. $\{-6\}$ D. $\{-36;36\}$

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu số nguyên tố p sao cho các số $p+2$ và $p+4$ đều là số nguyên tố?

A. 3 B. 2 C. 4 **D.** 1

Câu 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tích các hệ số góc của hai đường thẳng $y=(m-1)x+2021$ và $y=mx+2022$ (với $m \neq 1$ và $m \neq 0$) bằng 6. Tính tổng các phần tử của S.

A. 6 B. -6 **C.** 1 D. -1

Câu 7. Cho đường tròn (O), có đường kính 10cm và hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) sao cho độ dài cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{6}$ chu vi đường tròn (O). Tính khoảng cách từ O đến dây cung AB.

A. $5\sqrt{3}$ cm B. $4\sqrt{3}$ cm **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm D. $3\sqrt{3}$ cm

Câu 8. Cho đường tròn tâm O, bán kính R = 8cm tiếp xúc ngoài với đường tròn tâm I, bán kính r = 2cm. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) và (I) ở trên lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn AB

A. AB = 5cm B. AB = 4cm C. AB = 6cm **D.** AB = 8cm

Câu 9. Cho điểm $M(x_0;y_0)$ (với $x_0<0$) thuộc đường thẳng $y=x+3$ thỏa mãn $x_0^2+y_0^2=17$

Giá trị của biểu thức $x_0^2+x_0y_0$ bằng:

A. 0 B. 4 C. 5 **D.** 20

Câu 10. Biết $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+y}+3\sqrt{4x-3y}=13\\7\sqrt{x+y}-4\sqrt{4x-3y}=2\end{cases}$.

Giá trị của x_0+3y_0 là:

A. 6 B. 10 C. 1 D. 3

Câu 11. Cho biểu thức $f(x)=(x^3+12x-6)^{2022}$. Biết $a=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$, giá trị của $f(a)$ là một số tự nhiên có chữ số tận cùng là:

A. 4 B. 6 C. 0 D. 1

Câu 12. Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm tất cả các số thực m để giá trị nhỏ nhất của

$F=\left[(9-m)x-y-m\right]^2+(mx-2y+3)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 2 B. 6 C. 1 D. 0

Câu 13. Khi hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=2m^2-2m-2\\2x+y=5m\end{cases}$ (m là tham số) có nghiệm duy nhất là $(x_0;y_0)$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_0+y_0^2$ là:

A. 3 B. -6 C. -3 D. -9

Câu 14. Cho đường thẳng $(d): y=2x-m$ và Parabol $(P): y=x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt:

A. $m>1$ B. $m\ge 1$ C. $m\le 1$ D. $m<1$

Câu 15. Cho ΔABC có $\widehat{BAC}=40^0$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính số đo $\widehat{BIC}$

A. $\widehat{BIC}=135^0$ B. $\widehat{BIC}=90^0$ C. $\widehat{BIC}=120^0$ D. $\widehat{BIC}=110^0$

Câu 16. Cho tam giác ABC nhọn, có BK (K thuộc AC) và CE (E thuộc AB) là các đường cao. Đường tròn đường kính AB cắt đoạn CE tại P, đường tròn đường kính AC cắt đoạn BK tại Q. Biết $\widehat{PAQ}=60^0$ và AP = 5cm. Tính độ dài đoạn PQ.

A. PQ = 7,5cm B. PQ = 2,5cm C. PQ = 5cm D. PQ = 10cm

Câu 17. Nghiệm x của phương trình $\frac{x}{1}+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+...+\frac{x}{1+2+3+...+2022}=\frac{8088}{2023}$ là:

A. $x=\frac{1}{4}$ B. $x=2$ C. $x=3$ D. $x=\frac{1}{2}$

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 7. Biết độ dài các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B, C của tam giác ABC bằng nhau. Tính chu vi của tam giác ABC.

A. $14+7\sqrt{2}$ B. $21+7\sqrt{2}$ C. 21 D. $14+\sqrt{2}$

Câu 19. Số nghiệm của phương trình $(x^2-8x+7)(|x-2|-5)=0$ là:

A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 20. Gọi A, B là các số thực sao cho $\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$, với mọi $x\ne 1$ và $x\ne 3$.

Giá trị của $A+2B$ bằng:

A. -3 B. 3 C. 5 D. 1

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. 1) Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{4}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{x+\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}+2}-\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$ với $x>0$ và $x\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $4P+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-3)\left[x^2+2(m+1)x-m^2\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=91$

Lời giải. 1a) Ta có $P=\left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2.\left[\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\right]$

$$=\left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2.\frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x-1}{\left(4\sqrt{x}\right)^2}.\frac{-4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\frac{1-x}{4\sqrt{x}}$$

b) Ta có $4P+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}\Rightarrow\frac{1-x}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}\Leftrightarrow 6x-19\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow(6\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{36};x=9$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Phương trình luôn có nghiệm $x_3=3$. Để phương trình có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2+2(m+1)x-m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Tức là $\begin{cases}\Delta'>0\\3^2+6(m+1)-m^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(m+1)^2+m^2>0\\m^2-6m-15\neq 0\end{cases}\Rightarrow m\neq 3\pm 2\sqrt{6}$ (*)

Theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2m-2\\x_1x_2=-m^2\end{cases}$. Ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2=91\Rightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=82$

$\Rightarrow 4(m+1)^2+2m^2-82=0\Leftrightarrow 3m^2+4m-39=0\Leftrightarrow m=-\frac{13}{3};m=3$ (TMĐK (*))

Vậy $m\in\left\{-\frac{13}{3};3\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2. a) Giải phương trình $(2x^2-21x+55)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)=5(x-5)$

b) Cho x, y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\frac{x^4-1}{y+1}+\frac{y^4-1}{x+1}$ là một số nguyên.

Chứng minh rằng $x^4y^{12}-1$ chia hết cho $y+1$

Lời giải. a) ĐKXĐ: $x\geq\frac{8}{3}$. Phương trình tương đương

$$(x-5)\left[(2x-11)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)-5\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\(2x-11)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)=5\end{array}\right.$$

Xét $(2x-11)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)=5\Leftrightarrow(2x-11)(2x-9)=5\left(\sqrt{3x-8}+\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-40x+99=5\sqrt{3x-8}+5\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 4x^2-44x+96=5\sqrt{3x-8}-(3x-4)+5\sqrt{x+1}-(x+7)$

$$\Leftrightarrow 4(x-3)(x-8)=\frac{-9(x-8)(x-3)}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\frac{-(x-8)(x-3)}{5\sqrt{x+1}+(x+7)}$$

$$\Leftrightarrow(x-3)(x-8)\left(4+\frac{9}{5\sqrt{3x-8}+3x-4}+\frac{1}{5\sqrt{x+1}+x+7}\right)=0$$

Do $x \ge \frac{8}{3} \Rightarrow 4 + \frac{9}{5\sqrt{3x-8}+3x-4} + \frac{1}{5\sqrt{x+1}+x+7} > 0$ nên $(x-3)(x-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=8 \end{array}\right.$

Đối chiếu ĐKXĐ ta có tập nghiệm của phương trình $S=\{3;5;8\}$

b) Đặt $\frac{x^4-1}{y+1}=\frac{a}{b}$; $\frac{y^4-1}{x+1}=\frac{c}{d}$ với a, c $\in$ Z; b, d $\in N^*$ và $(a;b)=1$; $(c;d)=1$

Ta có $\frac{x^4-1}{y+1}+\frac{y^4-1}{x+1}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=k \Rightarrow ad+bc=kbd$ và $k \in Z$

Suy $\begin{cases} ad+bc \vdots b \\ ad+bc \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ad \vdots b \\ bc \vdots d \end{cases}$. Vì $(a;b)=1$; $(c;d)=1$ nên $\begin{cases} d \vdots b \\ b \vdots d \end{cases} \Rightarrow b=d$

Mặt khác $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{x^4-1}{y+1}.\frac{y^4-1}{x+1}=(x-1)(x^2+1)(y-1)(y^2+1)=m \in Z$ (vì x, y $\in$ Z)

$\Rightarrow ac=mbd \Rightarrow ac \vdots d \Rightarrow a \vdots d \Rightarrow a \vdots b$ mà $(a;b)=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow (x^4-1) \vdots (y+1)$

Ta có $x^4y^{12}-1=x^4y^{12}-x^4+x^4-1=x^4(y^{12}-1)+x^4-1$

Vì $y^{12}-1=(y^2-1)M \vdots (y+1)$ và $(x^4-1) \vdots (y+1)$ suy ra $x^4y^{12}-1$ chia hết cho $y+1$

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC) có đường cao AH (H thuộc BC). Đường tròn tâm A, bán kính AH cắt đường thẳng AH tại điểm thứ hai là E (E khác H) và cắt đoạn AB tại D. Qua điểm B kẻ tiếp tuyến với đường tròn (A) tại F (F khác H), tiếp tuyến này cắt tia CA tại G. Trên cung nhỏ DH của đường tròn (A) lấy điểm M (M khác H, D), tiếp tuyến với đường tròn (A) tại M cắt đường thẳng BC, BG lần lượt tại P và Q. Tia BM cắt đường tròn (A) tại N (N khác M).

a) Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên đường thẳng AB. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, M, N cùng thuộc một đường tròn và tia IH là tia phân giác của $\widehat{MIN}$

b) Gọi K, L lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng EM, EN. Chứng minh rằng đường thẳng HL song song với đường thẳng EK và $GQ.CP=GF.BC$

Lời giải. a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB có $BI.BA=BH^2$

Áp dụng phương tích đường tròn ta có

$BM.BN=BH^2 \Rightarrow BI.BA=BM.BN$

$\Rightarrow \frac{BI}{BN}=\frac{BM}{BA}$. Xét ΔBIM và ΔBNA có

$\widehat{ABN}$ chung và $\frac{BI}{BN}=\frac{BM}{BA}$ nên $\Delta BIM \backsim \Delta BNA$

$\Rightarrow \widehat{BIM}=\widehat{BNA}$ mà $\widehat{BIM}+\widehat{AIM}=180^0$

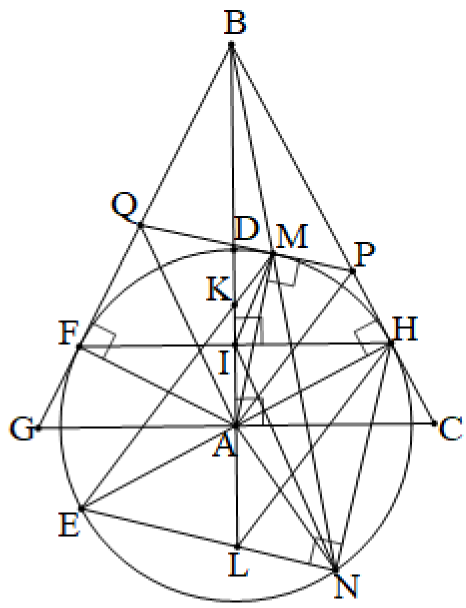
$\Rightarrow \widehat{BNA}+\widehat{AIM}=180^0$ suy ra tứ giác AIMN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIN}=\widehat{AMN}$ mà ΔAMN cân tại A nên

$\widehat{AMN}=\widehat{BNA}=\widehat{BIM} \Rightarrow \widehat{AIN}=\widehat{BIM}$

$\Rightarrow \widehat{HIM}=\widehat{HIN}$ (vì $IH \perp AB$), do đó

IH là tia phân giác của $\widehat{MIN}$



b) Ta có $\widehat{HIL}+\widehat{HNL}=180^0$ nên tứ giác HILN nội tiếp

Suy ra $\widehat{HLN}=\widehat{HIN}=\widehat{HIM}=\frac{1}{2}\widehat{MIN}=\frac{1}{2}\widehat{MAN}=\widehat{MEN}$ hay $\widehat{HLN}=\widehat{MEN}$ suy ra HL // EK

Ta có BA là phân giác, là đường cao của ΔBGC nên ΔBGC cân tại B $\Rightarrow \hat{C} = \hat{G}$ (1).

Mặt khác $\widehat{PAQ} = \widehat{MAP} + \widehat{MAQ} = \frac{1}{2}\left(\widehat{MAH} + \widehat{MAF}\right) = \frac{1}{2}\widehat{HAF} = \widehat{HAB} = \hat{C}$.

Do đó $\widehat{CPA} = 180^0 - \left(\hat{C} + \widehat{CAP}\right) = 180^0 - \left(\widehat{PAQ} + \widehat{CAP}\right) = \widehat{GAQ}$ hay $\widehat{CPA} = \widehat{GAQ}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta CPA \backsim \Delta GAQ$ (g – g) $\Rightarrow \frac{CP}{GA} = \frac{CA}{GQ} \Rightarrow GQ.CP = GA.CA = GA^2$

Áp dụng hệ thức lượng ta có $GF.BG = GA^2 \Rightarrow GF.BC = GA^2$. Suy ra $GQ.CP = GF.BC$

Câu 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \le 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $ab + bc + ca \le 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le 3$

Áp dụng BĐT Bunia ta có $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{2}\sqrt{a+b}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+b} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{a+b} - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} \ge \sqrt{\frac{ab}{a+b}}$.

Tương tự $\sqrt{b+c} - \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} \ge \sqrt{\frac{bc}{b+c}}$; $\sqrt{c+a} - \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \ge \sqrt{\frac{ca}{c+a}}$

Do đó $P \ge \sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a}}$. Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có

$P \ge \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}} \ge \frac{9}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}}$. Lại áp dụng BĐT Bunhia

$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \le \sqrt{6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \le \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow P \ge \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy GTNN của P bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Đạt được khi $a = b = c = 1$.